高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：97.10.09
範圍	1-3、4 向量的內積與應用	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=4-t \\ y=3+2t \end{cases}$，$t\in R$，則 L 的斜率為(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) -2 (E) $\dfrac{1}{2}$

【解答】(D)

【詳解】由 L：$\begin{cases} x=4-t \\ y=3+2t \end{cases}$，$t\in R$，$\Rightarrow$ 方向向量 $\overrightarrow{v}=(-1,2)$

※方向向量 $\overrightarrow{v}=(a,b)\Rightarrow m=\dfrac{b}{a}$ $\Rightarrow L$ 的斜率為 $\dfrac{2}{-1}=-2$

2. 設點 $A(-2，5)$，$B(12，47)$，則 $\overline{AB}$ 的格子點（x，y 坐標都是整數的點）共有
(A) 15 (B) 12 (C) 8 (D) 5 (E) 2 個

【解答】(A)

【詳解】∵ $\overrightarrow{AB}=(14，42)=14(1，3)$，$\overline{AB}$：$\begin{cases} x=-2+t \\ y=5+3t \end{cases}$，$0\le t\le 14$

∴ $\overline{AB}$ 的格子點，取 $t\in Z$ ∴ $t=0，1，2，\cdots，14$，共有 15 個

3. 直線 L：$3x-4y=7$ 有一個方向向量為$(1，t)$，$t\in R$，則 t 之值為
(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $-\dfrac{4}{3}$ (D) $-\dfrac{3}{4}$ (E)不是唯一的實數

【解答】(B)

【詳解】∵ 直線 $ax+by+c=0$ 的法向量為$(a，b)\Rightarrow$ 方向向量為 $(b，-a)$，

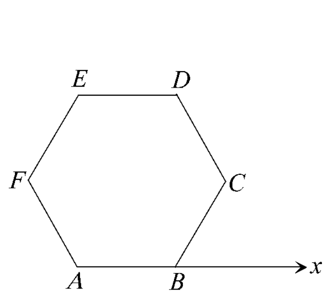
∴ L：$3x-4y=7$ 的方向向量為 $(4，3)=4(1,\dfrac{3}{4})$

4.(複選)五個直線參數式：(A) $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=2+2t \end{cases}$，$t\in R$ (B) $\begin{cases} x=4+3t \\ y=2+5t \end{cases}$，$t\in R$ (C) $\begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \end{cases}$，$t\in R$
(D) $\begin{cases} x=1-6t \\ y=3+4t \end{cases}$，$t\in R$ (E) $\begin{cases} x=3-8t \\ y=4-4t \end{cases}$，$t\in R$中，代表同一條直線的有__________。

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】將直線消去參數 t 化為一般式
(A) $x-2y=-5$ (B) $5x-3y=14$ (C) $x-2y=-5$ (D) $2x+3y=11$ (E) $x-2y=-5$

5. (複選)如圖，正六邊形 $ABCDEF$ 的邊長為 2，$\overline{AB}$ 在 x 軸上，則下列敘述何者正確？(A) $\overrightarrow{BC}=(1，\sqrt{3})$ (B) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$ (C) $\overrightarrow{CD}=(-1，\sqrt{3})$
(D)點 C 的坐標為$(3，\sqrt{3})$ (E) $|-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}|=2$



【解答】(A)(B)(C)

【詳解】根據極坐標

(A) $\overline{BC}=2$，$\overrightarrow{BC}$ 方向角為 60° ∴ $\overrightarrow{BC}=(2\cos60^\circ，2\sin60^\circ)=(1，\sqrt{3})$

(B)∵ $\overline{BC}\,//\,\overline{FE}$，且 $\overline{BC}=\overline{FE}=2$ ∴ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$

(C) $\overline{CD}=\overline{AF}=2$，$\overrightarrow{CD}\,//\,\overrightarrow{AF}$ 且方向角爲 120°，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}=(2\cos120°，2\sin120°)=(-1，\sqrt{3})$

(D)當 $A(0，0)$時，$B(2，0)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2+1，0+\sqrt{3})\ \Rightarrow C(3，\sqrt{3})$，但 A 未必是原點

$\therefore$ 點 C 的坐標未必爲$(3，\sqrt{3})$

(E) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CF}$

$\therefore\ |-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}|=\overline{CF}=2\overline{AB}=4$

6. 設 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ 爲平面上的二向量，若 $2\vec{a}+3\vec{b}=(11，2)$，$\vec{a}-2\vec{b}=(-5，-6)$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值 =

(A) 2　(B) -2　(C) 1　(D) -1　(E) 0

【解答】(D)

【詳解】聯立先求 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$

$$\begin{cases}2\vec{a}+3\vec{b}=(11，2)\cdots\cdots ①\\ \vec{a}-2\vec{b}=(-5，-6)\cdots\cdots ②\end{cases}$$

① × 2 + ② × 3　$\Rightarrow$　$(4\vec{a}+6\vec{b})+(3\vec{a}-6\vec{b})=(22，4)+(-15，-18)$

$\Rightarrow$　$7\vec{a}=(7，-14)$　$\Rightarrow$　$\vec{a}=(1，-2)$代入②

得$(1，-2)-2\vec{b}=(-5，-6)$　$\Rightarrow$　$2\vec{b}=(1，-2)-(-5，-6)=(6，4)$

$\Rightarrow$　$\vec{b}=(3，2)$　$\therefore$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1，-2)\cdot(3，2)=3-4=-1$

7. (複選)有一直線 L：$3x+4y=12$，則下列敘述何者爲真？

(A) L 之斜率$-\dfrac{3}{4}$　(B) L 之法向量$(3，4)$　(C) L 之方向向量$(-4，3)$　(D) L 之方向向量$(\dfrac{4}{5}，-\dfrac{3}{5})$

(E) L 之參數式：$\begin{cases}x=4t\\ y=3-3t\end{cases}$，$t\in R$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

L：$3x+4y=12$，斜率 $=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{3}{4}$，法向量 $\vec{n}=(3，4)$

$(-4，3)\perp\vec{n}=(3，4)$，故$(-4，3)$可爲方向向量

$(\dfrac{4}{5}，\dfrac{-3}{5})\,//\,(-4，3)$，故$(\dfrac{4}{5}，\dfrac{-3}{5})$亦爲方向向量

$(4，-3)\,//\,(-4，3)$，故$(4，-3)$爲 L 之方向向量

又$(0，3)\in L$，且 L 之方向向量$(4，-3)$，則 L 之參數式：$\begin{cases}x=0+4t\\ y=3-3t\end{cases}$，$t\in R$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $\vec{a}=(1，2)$，$\vec{b}=(t，1)$，

(1)若$(\vec{a}+2\vec{b})\,//\,(2\vec{a}-\vec{b})$，求 t 之值 =________________。

(2)若$(\vec{a}+2\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，求 t 之值 =________________。

【解答】(1)$\dfrac{1}{2}$　(2)$\dfrac{7}{2}$或-2

【詳解】

(1) $\vec{a}+2\vec{b}=(1+2t，4)$，$2\vec{a}-\vec{b}=(2-t，3)$

$(\vec{a}+2\vec{b})\,//\,(2\vec{a}-\vec{b})$　$\Rightarrow$　$(1+2t)：4=(2-t)：3$　$\therefore$　$8-4t=3+6t$　$\Rightarrow$　$t=\dfrac{1}{2}$

(2) $(\vec{a}+2\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$

$\therefore(1+2t)(2-t)+4\times3=0\Rightarrow(2t-7)(t+2)=0\Rightarrow t=\dfrac{7}{2}$ 或 $t=-2$

2. $\vec{u}=(3，-2)$，$\vec{v}=(1，4)$，$\vec{w}=(-1，-3)$，則$\vec{u}\cdot(2\vec{v}-3\vec{w})=$ ________。

【解答】-19

【詳解】

$2\vec{v}-3\vec{w}=2(1，4)-3(-1，-3)=(2，8)-(-3，-9)=(2-(-3)，8-(-9))=(5，17)$

$\vec{u}\cdot(2\vec{v}-3\vec{w})=(3，-2)\cdot(5，17)=3\times5+(-2)\times17=-19$

3. 設有一直線L，其參數方程式爲$\begin{cases}x=2+3t\\y=1-4t\end{cases}$，$t\in R$，則$L$之一般方程式（$ax+by+c=0$）爲___。

【解答】$4x+3y-11=0$

【詳解】$\begin{cases}x=2+3t\\y=1-4t\end{cases}$，$t\in R$，消去 t，$4x+3y=8+3=11 \Rightarrow 4x+3y-11=0$

4. 通過$(1，2)$且斜率爲$\dfrac{1}{3}$的直線參數式爲________。

【解答】$\begin{cases}x=1+3t\\y=2+t\end{cases}$，$t\in R$

【詳解】斜率 $m=\dfrac{1}{3}=\dfrac{b}{a}$，則方向向量$\vec{d}=(a，b)$，取 $a=3$，$b=1 \Rightarrow \begin{cases}x=1+3t\\y=2+t\end{cases}$，$t\in R$

5. $\triangle ABC$中，$A(2，-8)$，$B(-6，-2)$，$C(6，-5)$，

(1)求$\triangle ABC$的重心G之坐標爲________。

(2)若$\angle A$之平分線交$\overline{BC}$於D，求D坐標________。

(3)若$\angle A$之外角平分線交直線BC於E，求E坐標_______。

【解答】(1) $(\dfrac{2}{3}，-5)$ (2) $(2，-4)$ (3) $(18，-8)$

【詳解】

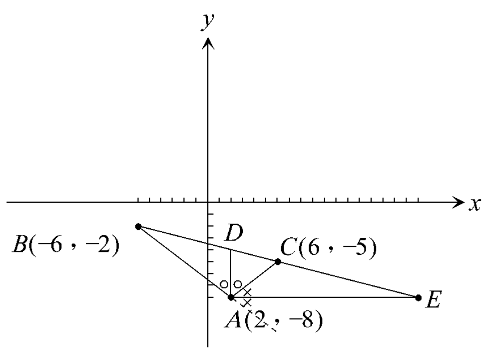
(1)$\triangle ABC$ 的重心 G 之坐標爲$(\dfrac{2-6+6}{3}，\dfrac{-8-2-5}{3})=(\dfrac{2}{3}，-5)$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{64+36}=10$，$\overline{AC}=\sqrt{16+9}=5 \Rightarrow$內分比$\overline{BD}：\overline{DC}=\overline{AB}：\overline{AC}=10：5=2：1$

設 $D(x，y) \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-6+2\cdot6}{1+2}=2\\y=\dfrac{-2+2\cdot(-5)}{1+2}=-4\end{cases} \quad\therefore D(2，-4)$

(3) $\overline{AE}$ 爲$\angle A$ 的外角平分線 $\Rightarrow$外分比$\overline{BE}：\overline{CE}=\overline{AB}：\overline{AC}=2：1$

設 $E(x，y) \Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-6}{2}=6\\\dfrac{y-2}{2}=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=18\\y=-8\end{cases} \quad\therefore E(18，-8)$



6. 設$A(1，-1)$，$B(4，3)$，$P(x，y)$爲直線AB上的一點，求x^2-3y的最小值________。

【解答】3

【詳解】

$A(1，-1)，B(4，3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3,4)$ ，$P \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}x=1+3t\\ y=-1+4t\end{cases},t\in R$

$\because$ P爲直線$\overleftrightarrow{AB}$上的一點 $\therefore$ 設P點的坐標$(x，y)=(1+3t,-1+4t)$

則$x^2-3y=(1+3t)^2-3(-1+4t)^2=-39t^2+30t-2=-39(t-\dfrac{15}{39})^2+3$

$\therefore$ 當$t=\dfrac{15}{39}$時，x^2-3y有最小值爲 3

7. 設有一線段AB，其參數方程式爲$\begin{cases}x=2+3\cos^2\theta\\ y=1-4\sin^2\theta\end{cases}$，$\theta\in R$，則此線段$AB$之長度 =________。

【解答】5

【詳解】

$\begin{cases}x=2+3\cos^2\theta\\ y=1-4\sin^2\theta\end{cases}$，設$\cos^2\theta=t,\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-t$，且$0\le\cos^2\theta\le1$即$0\le t\le1$，

代入消去$\theta\Rightarrow$ $\begin{cases}x=2+3t\\ y=1-4(1-t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2+3t\\ y=-3+4t\end{cases}$，$0\le t\le1\Rightarrow$ $2\le x\le5$

①$x=2$ $\Rightarrow$ $y=-3$ $\Rightarrow$ 取$A(2，-3)$；

②$x=5$ $\Rightarrow$ $y=1$ $\Rightarrow$ 取$B(5，1)$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}=\sqrt{9+16}=5$

8. 設θ爲$\vec{u}=(1，3)$與$\vec{v}=(-3，4)$兩向量之夾角，則$\cos\theta=$__________。

【解答】$\dfrac{9\sqrt{10}}{50}$

【詳解】$\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{(-3)+12}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{25}}=\dfrac{9}{5\sqrt{10}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{50}$

9. 設$\vec{a}=(2，0)$，$\vec{b}=(1，1)$，t是實數，則 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 的最小值爲__________。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】$\vec{a}+t\vec{b}=(2，0)+t(1，1)=(2+t，t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(2+t)^2+t^2}=\sqrt{2(t+1)^2+2}$，當 $t=-1$ 時，有最小值爲$\sqrt{2}$

10. 設直線的參數方程式分別爲L_1：$\begin{cases}x=3+2t\\ y=2-t\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases}x=-1+t\\ y=5-t\end{cases}$，$t\in R$，求$L_1$與$L_2$的交點爲__________。

【解答】$(1，3)$

【詳解】

(1) L_1：$\begin{cases}x=3+2t\\ y=2-t\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases}x=-1+s\\ y=5-s\end{cases}$，$s\in R$，則$\begin{cases}3+2t=-1+s\\ 2-t=5-s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t-s=-4\cdots\cdots ①\\ -t+s=3\cdots\cdots ②\end{cases}$

解①，② $\Rightarrow$ $t=-1$，$s=2$，故L_1與L_2的交點爲$(1，3)$

11. 設一平面上 $P(1，2)$，直線 $L：2x+3y-6=0$，則 P 點到直線 L 的垂直距離長 $=$

(A) $\frac{1}{\sqrt{13}}$　(B) $\frac{2}{\sqrt{13}}$　(C) $\frac{3}{\sqrt{13}}$　(D) $\frac{4}{\sqrt{13}}$　(E) $\frac{5}{\sqrt{13}}$

【解答】(B)

【詳解】$d(P；L)=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 2-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

12. 平面上兩平行直線 $4x+3y-7=0$ 與 $8x+6y+1=0$ 之間的距離爲__________。

【解答】$\frac{3}{2}$

【詳解】$8x+6y+1=0 \Rightarrow 4x+3y+\frac{1}{2}=0$，兩平行直線距離 $=\frac{\left|\frac{1}{2}-(-7)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{2}$

13. 若 $L_1：2x-y+2=0$，$L_2：3x+y-4=0$，則 L_1 與 L_2 之夾角 θ 爲__________。

【解答】$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

【詳解】L_1 及 L_2 之法向量，分別爲 $\overrightarrow{n_1}=(2，-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(3，1)$

則 $\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{6-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$

14. 設 $\vec{a}=(2，6)$，$\vec{b}=(-4，3)$，則

(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上之投影量 $=$__________。(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上之投影(正射影) $=$__________。

【解答】(1) 2　(2) $(\frac{-8}{5}，\frac{6}{5})$

【詳解】$\vec{a}=(2，6)$，$\vec{b}=(-4，3)$，θ 爲 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 之夾角

(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上之投影量 $=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|})=\frac{10}{5}=2$

(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上之正射影 $=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=(\frac{-8+18}{(\sqrt{(-4)^2+3^2})^2})(-4，3)=(\frac{-8}{5}，\frac{6}{5})$

15. 設 $\vec{u}=(5，5)$ 且直線 $L：3x-y+2=0$，則 $\vec{u}$ 在 L 上的正射影爲__________。

【解答】$(2，6)$

【詳解】在 $L：3x-y+2=0$ 上取方向向量 $\overrightarrow{AB}=(1，3)$

$\vec{u}$ 在 L 上之正射影 $=\vec{u}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上之正射影 $=(\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\overrightarrow{AB}=\frac{20}{10}\cdot(1，3)=(2，6)$

16. 過點 $A(1，5)$ 而與向量 $\vec{n}=(3，-2)$ 垂直的直線方程式爲__________。

【解答】$3x-2y+7=0$

【詳解】直線 L 與 $\vec{n}=(3，-2)$ 垂直，故 $\vec{n}$ 爲 L 之法向量，設 $L：3x-2y+k=0$

$A(1，5)$ 代入 L，得 $k=7$　$\therefore$　$L：3x-2y+7=0$

17. 設平面上有三點A，B，C，已知$\overrightarrow{AB}=(4，1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-3)$，則

(1)$\triangle ABC$之周長 $=$________。(2) $\triangle ABC$的面積爲__________。

【解答】(1)$5+\sqrt{17}+\sqrt{10}$　(2)$\dfrac{13}{2}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(4，1)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$，$\overrightarrow{AC}=(1，-3)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-3，-4)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{BC}|=5$

$\therefore$　$\triangle ABC$ 之周長$=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|=5+\sqrt{17}+\sqrt{10}$

(2) $\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & 1\\ 1 & -3\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|-12-1|=\dfrac{13}{2}$

18. O爲$\triangle ABC$重心，若 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$面積__________。

【解答】$\dfrac{3}{4}\sqrt{7}$

【詳解】

O爲$\triangle ABC$之重心，則$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\quad\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}\quad\Rightarrow|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{-3}{2}$

$\triangle ABC$之面積 $=3(\triangle AOB$之面積$)=3\times\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=3\times\dfrac{1}{2}\sqrt{1\times4-(\dfrac{-3}{2})^2}=\dfrac{3}{4}\sqrt{7}$

19.平面上，O爲原點，$P(2，3)$，Q在直線$x+y-1=0$上。

(1)若 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$，則$Q$之坐標爲__________及__________。（有二解）

(2)當$\overrightarrow{PQ}$之長度，最小值 $=$__________，此時之Q點爲__________。

【解答】(1) $(3，-2)$，$(-2，3)$　(2) $2\sqrt{2}$，$(0，1)$

【詳解】Q點在直線$x+y-1=0$上 $\Rightarrow$ 設$Q\,(t，1-t)$，$t\in R$

(1) $|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2\Rightarrow2^2+3^2=t^2+(1-t)^2\ \Rightarrow\ 2t^2-2t-12=0\Rightarrow\ t^2-t-6=0\ \Rightarrow\ t=3，-2$

①$t=3$時，$Q(3，-2)$；②$t=-2$時，$Q(-2，3)$

(2) $\overrightarrow{PQ}=(t，1-t)-(2，3)=(t-2，-t-2)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(t-2)^2+(-t-2)^2}=\sqrt{2t^2+8}$

$\therefore$　當$t=0$時，$|\overrightarrow{PQ}|$ 有最小值$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，此時，$Q(0，1)$

20.設平面上有二直線L_1：$x-2y-3=0$，L_2：$2x+ky-1=0$，$k\in R$。若$L_1\perp L_2$，則$k=$______。

【解答】 1

【詳解】L_1：$x-2y-3=0\ \Rightarrow$ 取$\overrightarrow{N_1}=(1，-2)$

L_2：$2x+ky-1=0\ \Rightarrow$ 取$\overrightarrow{N_2}=(2，k)$，

$L_1\perp L_2$即$\overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{N_2}\Rightarrow\ \overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=2-2k=0\ \Rightarrow\ k=1$

21.求一向量$\bar{U}$使 $|\bar{U}|=1$，且$\bar{U}$與$\bar{V}=(4，3)$ 反方向，則$\bar{U}=$__________。

【解答】$(-\dfrac{4}{5}，-\dfrac{3}{5})$

【詳解】$|\bar{U}|=1$，且$\bar{U}$與$\bar{V}$ 反向，則$\bar{U}=-\dfrac{\overrightarrow{V}}{|\overrightarrow{V}|}=\dfrac{(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}=(-\dfrac{4}{5}，-\dfrac{3}{5})$

22.與$(-4，3)$垂直，長為 2 的向量是 __________。

【解答】$\pm(\dfrac{6}{5}，\dfrac{8}{5})$

【詳解】與$(-4，3)$垂直的向量，即與$(3，4)$平行的向量，又長 2，故$\pm 2\dfrac{(3，4)}{5}=\pm(\dfrac{6}{5}，\dfrac{8}{5})$為所求

23.設$L：2x-y+3=0$，試求過點$(1，3)$且與L之一夾角為$\dfrac{\pi}{4}$的直線方程式__________。

【解答】$3x+y=6$ 或 $x-3y=-8$

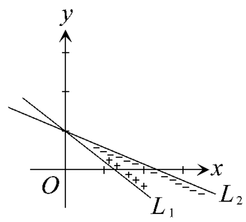
【詳解】設所求直線之斜率為 m，且方程式為$(y-3)=m(x-1)$

$L：2x-y+3=0$ 之斜率為$-\dfrac{2}{-1}=2$，，則 $\tan\dfrac{\pi}{4}=\pm(\dfrac{m-2}{1+2m})$

$\Rightarrow 1=\dfrac{m-2}{1+2m}$ 或 $1=-\dfrac{m-2}{1+2m}$ $\Rightarrow$ $m=-3$ 或 $m=\dfrac{1}{3}$

所求為$(y-3)=-3(x-1)$或$(y-3)=\dfrac{1}{3}(x-1)$，即 $3x+y=6$ 或 $x-3y=-8$

24.二直線$L_1：3x+4y-4=0$，$L_2：5x+12y-12=0$ 交角中，則銳角的角平分線方程式為________



【解答】$4x+7y-7=0$

【詳解】由圖知，銳角角平分線位在L_1，L_2之異號區［ 用(0,0)測知異號區 ］

故取$(\dfrac{3x+4y-4}{5})=-(\dfrac{5x+12y-12}{13})$ $\Rightarrow$ $4x+7y-7=0$

25.坐標平面上三點$A(2，-1)$，$B(-1，3)$，$C(3，2)$，若平面上一點D滿足$\overrightarrow{CD}\,//\,\overrightarrow{AB}$ 且 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$，求$D$點坐標__________。

【解答】$(\dfrac{10}{3}，\dfrac{14}{9})$

【詳解】設 D 之坐標為$(x，y)$

$\overrightarrow{CD}=(x-3，y-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-3，4)$，$\overrightarrow{BD}=(x+1，y-3)$，$\overrightarrow{AC}=(1，3)$

$\overrightarrow{CD}\,//\,\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-2}{4}$，得 $4x+3y=18$……①

$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $(x+1，y-3)\cdot(1，3)=0$，得 $x+3y=8$……②

解①，② $\Rightarrow$ $D(x，y)=(\dfrac{10}{3}，\dfrac{14}{9})$

26.坐標平面上三點$A(2，-1)$，$B(-1，3)$，$C(3，2)$，若直線 $2x-3y=1$ 交 $\overline{AB}$ 於Q點，求 $\overline{AQ}：\overline{BQ}=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】1：2

【詳解】$\overline{AQ}：\overline{BQ}=d(A；L)：d(B；L)=\dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{4+9}}：\dfrac{|-2-9-1|}{\sqrt{4+9}}=6：12=1：2$

27.設$A(3，2)$，$L：2x-y+1=0$，則A在L上之投影坐標為＿＿＿＿＿，A關於L之對稱點為＿＿＿＿＿，又A至直線L之距離 $=$ ＿＿＿＿＿。

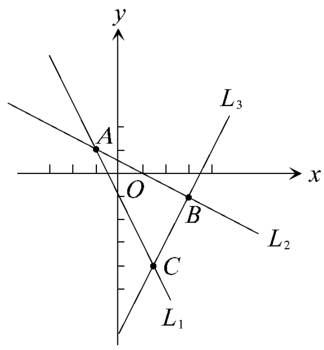
【解答】$(1，3)$，$(-1，4)$，$\sqrt{5}$

【詳解】$A(3，2)$，$L：2x-y+1=0$　$t=6-2+1$

$$\Rightarrow \quad A \text{ 在 } L \text{ 上之投影點 } H：\begin{cases} x=3-\dfrac{1\times 2(6-2+1)}{2^2+1^2}=1 \\ y=2-\dfrac{1\times(-1)(6-2+1)}{2^2+1^2}=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A \text{ 關於 } L \text{ 之對稱點 } A'：\begin{cases} x=3-\dfrac{2\times 2(6-2+1)}{2^2+1^2}=1 \\ y=2-\dfrac{2\times(-1)(6-2+1)}{2^2+1^2}=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d(A；L)=\frac{6-2+1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



28. 已知△ABC中，A、B、C點坐標為$(-1，1)$ 、$(3，-1)$、$(\frac{3}{2}，-4)$，其內心坐標為＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{3}{2}，-\frac{3}{2})$

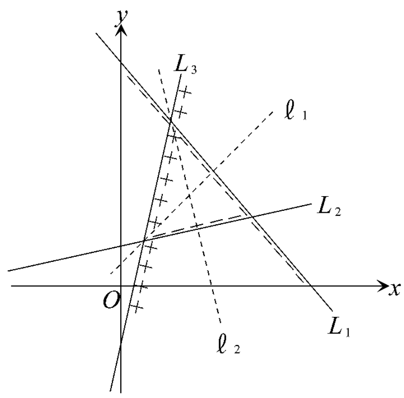
【詳解】

$a=\overline{BC}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+9}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，$b=\overline{AC}=\sqrt{\dfrac{25}{4}+25}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$，$c=\overline{AB}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$，$a：b：c=3：5：4$

設 I 為△ABC 之內心，O 為原點$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OI}=\dfrac{3}{3+5+4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{3+5+4}\overrightarrow{OB}+\dfrac{4}{3+5+4}\overrightarrow{OC}$

內心 $I(\dfrac{3\times(-1)+5\times 3+4\times\frac{3}{2}}{3+5+4},\dfrac{3\times 1+5\times(-1)+4\times(-4)}{3+5+4})=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2})$

29.求三直線$L_1：7x+6y-59=0$，$L_2：2x-9y+16=0$，$L_3：9x-2y-5=0$ 所圍成三角形的內心坐標。



【解答】$(3，4)$

【詳解】L_1，L_2，L_3的圖形如圖(以原點測試同號區、異號區)

$\therefore L_2$，L_3的交角平分線，ℓ_1：$\dfrac{2x-9y+16}{\sqrt{4+81}}=-\dfrac{9x-2y-5}{\sqrt{81+4}}$ (異號區)

即ℓ_1：$x-y+1=0$

L_1，L_3的交角平分線，取ℓ_2：$\dfrac{7x+6y-59}{\sqrt{49+36}}=-\dfrac{9x-2y-5}{\sqrt{81+4}}$(異號區)　即$\ell_2$：$4x+y-16=0$

∴　內心是ℓ_1，ℓ_2之交點，解聯立，其坐標為(3，4)

30. 已知x，y為實數且 $9x^2+25y^2=81$，則 $6x+5y$的最大值為__________；產生最大值時的數對$(x，y)=$__________。

【解答】$9\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}，\dfrac{9\sqrt{5}}{25}\right)$

【詳解】

$3x$　　$5y$

2　　1

柯西不等式知$(6x+5y)^2\le[(3x)^2+(5y)^2](2^2+1^2)$　⇒　$(6x+5y)^2\le 81\times 5$

∴　$-9\sqrt{5}\le 6x+5y\le 9\sqrt{5}$，即最大值為 $9\sqrt{5}$

此時$\dfrac{3x}{2}=\dfrac{5y}{1}=k$，則$x=\dfrac{2}{3}k$，$y=\dfrac{1}{5}k\Rightarrow 6x+5y=6\times\dfrac{2}{3}k+5\cdot\dfrac{1}{5}k=5k=9\sqrt{5}$　⇒　$k=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$

則$x=\dfrac{2}{3}k=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{9\sqrt{5}}{5}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{1}{5}k=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{9\sqrt{5}}{5}=\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$