

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.09.24				
範圍	1-2 向量及其應用	班級		姓名
		座號		

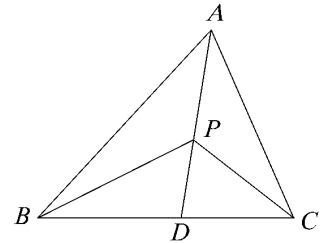
一、選擇題(每題 10 分)

1. 設 $2\vec{PA} = \alpha\vec{PB} + \beta\vec{PC}$ ， $\alpha, \beta \in R$ ，若 A, B, C 共線，則 $\alpha + \beta$ 之值為
 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E) 不能確定

【解答】(C)

【詳解】 $2\vec{PA} = \alpha\vec{PB} + \beta\vec{PC} \Rightarrow \vec{PA} = \frac{\alpha}{2}\vec{PB} + \frac{\beta}{2}\vec{PC}$

$\because A, B, C$ 共線 $\therefore \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2$



2. 如圖，已知 $\vec{AP} = \frac{3}{19}\vec{AB} + \frac{5}{19}\vec{AC}$ ，則 $\triangle ABP$ 面積是 $\triangle ACP$ 面積的
 (A) $\frac{19}{15}$ (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{8}{5}$ 倍

【解答】(D)

【詳解】由 $\vec{AP} = \frac{3}{19}\vec{AB} + \frac{5}{19}\vec{AC}$ ， $\because \frac{3}{19} + \frac{5}{19} < 1 \therefore P, B, C$ 不共線

設 $\vec{AD} = t\vec{AP} = \frac{3t}{19}\vec{AB} + \frac{5t}{19}\vec{AC}$ ， $\because B, D, C$ 共線 $\therefore \frac{3t}{19} + \frac{5t}{19} = 1 \Rightarrow t = \frac{19}{8}$

$\therefore \vec{AD} = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{5}{8}\vec{AC} \Rightarrow \vec{BD} : \vec{DC} = 5 : 3$ ，故 $\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP} = \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{\vec{BD}}{\vec{CD}} = \frac{5}{3}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 若 $\triangle ABC$ 中， $\vec{AB} = 2$ ， $\vec{AC} = 3$ ， $\vec{BC} = 4$ 且 $\angle A$ 的角平分線 \vec{AD} 交 \vec{BC} 於 D 點，求

(1) $\vec{AD} = r\vec{AB} + s\vec{AC}$ ，求數對 $(r, s) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) $|\vec{AD}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】(1) $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ (2) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$

【詳解】

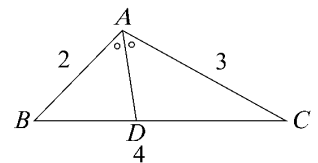
$\vec{AB} = 2$ ， $\vec{AC} = 3$ ， $\vec{BC} = 4$ ，

內分比性質 $\Rightarrow \vec{BD} : \vec{DC} = \vec{AB} : \vec{AC} = 2 : 3 \therefore \vec{AD} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$

$\Rightarrow |\vec{AD}|^2 = \frac{1}{25} |3\vec{AB} + 2\vec{AC}|^2 = \frac{1}{25} (9|\vec{AB}|^2 + 12\vec{AB} \cdot \vec{AC} + 4|\vec{AC}|^2)$

又 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 3 \times \cos A = 6 \times \frac{4+9-16}{2 \times 2 \times 3} = \frac{4+9-16}{2} = -\frac{3}{2}$

故 $|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{25} (9 \times 4 + 12 \times (-\frac{3}{2}) + 4 \times 9) = \frac{54}{25}$ ，即 $|\vec{AD}| = \frac{3\sqrt{6}}{5}$



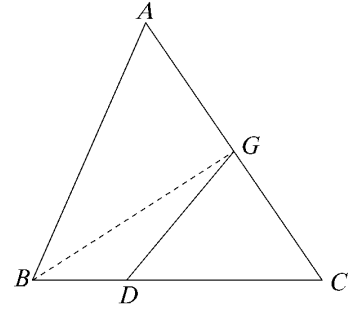
2. $\triangle ABC$ 中， D 為 \vec{BC} 上一點且 $\vec{CD} = 2\vec{BD}$ ， G 為 \vec{AC} 中點，若 $\vec{GD} = r\vec{AB} + s\vec{AC}$ ， $r, s \in R$ ，則

數對 $(r, s) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6})$

【詳解】 連接 \overline{BD} ， $\overline{CD} = 2\overline{BD} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overline{GD} &= \frac{2}{3}\overline{GB} + \frac{1}{3}\overline{GC} = \frac{2}{3}(\overline{AB} - \overline{AG}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overline{AC}) = \frac{2}{3}(\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC}) + \frac{1}{6}\overline{AC} \\ &= \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overline{AC}) + \frac{1}{6}\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AC}, \therefore (r, s) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{6})\end{aligned}$$



3. 設 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心，若 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 8$ ，則 $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 8

【詳解】 若 H 為垂心，則 $\overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 8$

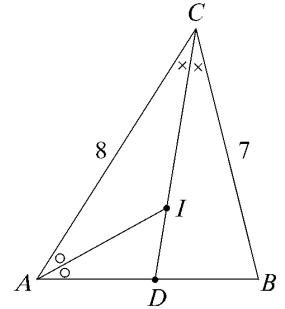
4. 設 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{AC} = 8$ ， I 為 $\triangle ABC$ 之內心，直線 CI 交 \overline{AB} 於 D ，則 $\overline{CI} = k\overline{CD}$ 時， $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $\frac{5}{7}$

【詳解】

$$\overline{CD} \text{ 為角平分線，} \overline{AD} : \overline{BD} = \overline{CA} : \overline{CB} = 8 : 7 \quad \therefore \overline{AD} = \frac{8}{15}\overline{AB} = \frac{8}{15} \times 6 = \frac{16}{5}$$

$$\overline{AI} \text{ 為角平分線，} \overline{CI} : \overline{DI} = \overline{AC} : \overline{AD} = 8 : \frac{16}{5} = 5 : 2, \text{ 故 } \overline{CI} = \frac{5}{7}\overline{CD}, \text{ 得 } k = \frac{5}{7}$$



5. $\triangle ABC$ 之三邊， $a = \overline{BC} = 3$ ， $b = \overline{CA} = 5$ ， $c = \overline{AB} = 7$ ，

(1) G 為 $\triangle ABC$ 之重心 $\Rightarrow \overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}\overline{AB} + \underline{\hspace{2cm}}\overline{AC}$ 。

(2) I 為 $\triangle ABC$ 之內心 $\Rightarrow \overline{AI} = \underline{\hspace{2cm}}\overline{AB} + \underline{\hspace{2cm}}\overline{AC}$ 。

【解答】 (1) $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ (2) $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{7}{15}\overline{AC}$

【詳解】

(1) 對於任意三角形 ABC ， G 為 $\triangle ABC$ 之重心 $\Rightarrow \overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$

(2) $\triangle ABC$ 之三邊 $a = 3$ ， $b = 5$ ， $c = 7$

$$I \text{ 為內心 } \Rightarrow \overline{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{7}{15}\overline{AC}$$

6. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 5$ ， K 為外心，若 $\overline{AK} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，求 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $(\frac{3}{7}, \frac{16}{35})$

【詳解】

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 5^2 - 6^2) = \frac{5}{2} \\ \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = 8 \\ \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \Rightarrow 16x + \frac{5}{2}y = 8 \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x + 25y = \frac{25}{2} \dots\dots ②$$

解①, ②得 $(x, y) = (\frac{3}{7}, \frac{16}{35})$

7. $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 2\sqrt{13}$, 又 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心, 若 $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 則數對 $(x, y) =$ _____。

【解答】 $(\frac{5}{9}, \frac{1}{6})$

【詳解】

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2) = \frac{1}{2}(36 + 64 - 52) = 24$$

$$H \text{ 為垂心} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 24 \Rightarrow 36x + 24y = 24 \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 = 24 \Rightarrow 24x + 64y = 24 \dots\dots ②$$

解①, ②得數對 $(x, y) = (\frac{5}{9}, \frac{1}{6})$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CA} = 4$ 且 \overline{BE} 為 \overline{AC} 上之中線, 則 \overline{BE} 之長為 _____。

【解答】 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【詳解】 \overline{BE} 為 \overline{AC} 上之中線 $\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{1}{1}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

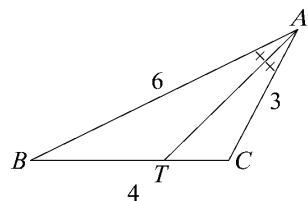
$$|\overrightarrow{BE}|^2 = |\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\overline{BA}^2 + 2 \times \frac{\overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2} + \overline{BC}^2)$$

$$= \frac{1}{4}[2^2 + (2^2 + 3^2 - 4^2) + 3^2] = \frac{10}{4}$$

中線 $\overline{BE} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

9. $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{BC} = 4$, $\overline{CA} = 3$, $\overline{AB} = 6$, $\angle A$ 的分角線交 \overline{BC} 於 T 點, 求 \overline{AT} 之長 _____。



【解答】 $\frac{\sqrt{130}}{3}$

【詳解】

\overline{AT} 為角平分線， $\overline{BT} : \overline{CT} = \overline{AB} : \overline{AC} = 6 : 3 = 2 : 1$ ， $\overline{AT} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}$

$|\overline{AT}|^2 = |\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC}|^2 = \frac{1}{9}|\overline{AB} + 2\overline{AC}|^2 = \frac{1}{9}[|\overline{AB}|^2 + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC} + 4|\overline{AC}|^2]$

$= \frac{1}{9}[\overline{AB}^2 + 4 \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2} + 4\overline{AC}^2]$

$= \frac{1}{9}[6^2 + 4 \times \frac{6^2 + 3^2 - 4^2}{2} + 4 \times 3^2] = \frac{130}{9}$

$\Rightarrow \overline{AT} = \frac{\sqrt{130}}{3}$

10. 若G是 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\overline{GA} = 3$ ， $\overline{GB} = 4$ ， $\overline{GC} = 5$ ，則 $\overline{GB} \cdot \overline{GC} =$ _____。

【解答】 - 16

【詳解】

若G為 $\triangle ABC$ 之重心，則 $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overline{GB} + \overline{GC} = -\overline{GA}$

$\Rightarrow |\overline{GB} + \overline{GC}|^2 = |-\overline{GA}|^2 \Rightarrow |\overline{GB}|^2 + |\overline{GC}|^2 + 2\overline{GB} \cdot \overline{GC} = |\overline{GA}|^2$

$\Rightarrow 4^2 + 5^2 + 2\overline{GB} \cdot \overline{GC} = 3^2 \Rightarrow \overline{GB} \cdot \overline{GC} = -16$

11. 設 $\triangle ABC$ 中，D，E，F三點分別在 \overline{AB} ， \overline{BC} ， \overline{CA} 上， $\overline{AD} = \overline{DB}$ ， $\overline{BC} = 4\overline{BE}$ ， $\overline{CF} = 2\overline{AF}$ 且

G是 $\triangle DEF$ 的重心，若 $\overline{AG} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，則 $(x, y) =$ _____。

【解答】 $(\frac{5}{12}, \frac{7}{36})$

【詳解】

\because G為 $\triangle DEF$ 的重心

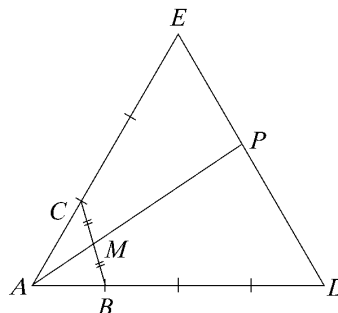
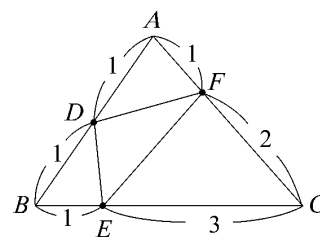
$\therefore \overline{AG} = \frac{1}{3}(\overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF})$

$= \frac{1}{3}[\frac{1}{2}\overline{AB} + (\frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}) + \frac{1}{3}\overline{AC}]$

$= \frac{1}{3}(\frac{5}{4}\overline{AB} + \frac{7}{12}\overline{AC})$

$= \frac{5}{12}\overline{AB} + \frac{7}{36}\overline{AC}$

$\therefore (x, y) = (\frac{5}{12}, \frac{7}{36})$



12. $\triangle ABC$ 中，M為 \overline{BC} 之中點， $\overline{AD} = 4\overline{AB}$ ， $\overline{AE} = 3\overline{AC}$ ，延長 \overline{AM} 交

\overline{DE} 於P，則(1) $\overline{AP} = k\overline{AM} \Rightarrow k =$ _____。

(2) $\overline{AP} =$ _____ $\overline{AD} +$ _____ \overline{AE} 。

【解答】(1) $k = \frac{24}{7}$ (2) $\vec{AP} = \frac{3}{7}\vec{AD} + \frac{4}{7}\vec{AE}$

【詳解】

M 為 \overline{BC} 之中點 $\Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

設 $\vec{AP} = k\vec{AM} = \frac{k}{2}\vec{AB} + \frac{k}{2}\vec{AC} = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{3}\vec{AE} = \frac{k}{8}\vec{AD} + \frac{k}{6}\vec{AE}$

$\therefore D, P, E$ 三點共線 $\therefore \frac{k}{8} + \frac{k}{6} = 1 \Rightarrow k = \frac{24}{7}$

故 $\vec{AP} = \frac{1}{8} \cdot \frac{24}{7}\vec{AD} + \frac{1}{6} \cdot \frac{24}{7}\vec{AE} = \frac{3}{7}\vec{AD} + \frac{4}{7}\vec{AE}$

13. $\triangle ABC$ 中， D 是 \overline{AB} 中點， E 點在 \overline{AC} 上，且 $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 1$ ， \overline{CD} 與 \overline{BE} 交於 P 點，

(1) 設 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，求數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) 求 $\overline{BP} : \overline{PE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】(1) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (2) $3 : 1$

【詳解】

(1) $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC} = x\vec{AB} + \frac{3}{2}y\vec{AE}$ ($\because \overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 1$)

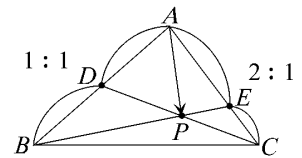
$\therefore B, P, E$ 三點共線 $\therefore x + \frac{3}{2}y = 1 \dots\dots \textcircled{1}$

$\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC} = 2x\vec{AD} + y\vec{AC}$ ($\because \overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 1$)

$\therefore D, P, C$ 三點共線 $\therefore 2x + y = 1 \dots\dots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得 $(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

(2) $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \Rightarrow \vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AE} \Rightarrow \overline{BP} : \overline{PE} = 3 : 1$

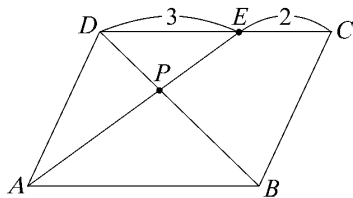


14. 平行四邊形 $ABCD$ 中， E 在 \overline{CD} 上，且 $3\overline{CE} = 5\overline{DE}$ ， \overline{AE} 與 \overline{BD} 交

於 P 點，若 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$ ，則實數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$

【詳解】



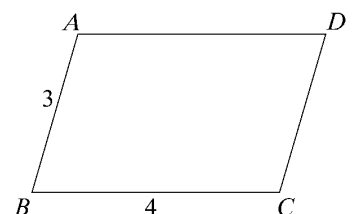
由 $3\overline{CE} = 5\overline{DE}$ ，可知

$\Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}}$ ($\because \triangle DEP \sim \triangle BAP$)

故 $\vec{AP} = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{5}{8}\vec{AD}$ ，得 $(x, y) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$

15. $ABCD$ 為平行四邊形，若 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，求 $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ 之值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

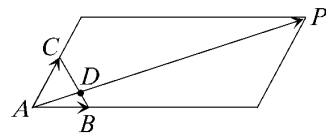
【解答】7



【詳解】 $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AD} + \vec{AB})(\vec{AD} - \vec{AB}) = |\vec{AD}|^2 - |\vec{AB}|^2 = 4^2 - 3^2 = 7$

16. 設 A, B, C 三點不共線， $\vec{AP} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ ，令 \vec{AP} 交 \vec{BC} 於 D ，

若 $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，求 x, y 之值_____。



【解答】 $x = \frac{3}{5}$ ， $y = \frac{2}{5}$

【詳解】

$\because \vec{AP} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ ，設 $\vec{AD} = t\vec{AP} = 3t\vec{AB} + 2t\vec{AC}$ ， B, D, C 共線 $\Rightarrow 3t + 2t = 1, t = \frac{1}{5}$

$\therefore \vec{AD} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$ ， $\therefore x = \frac{3}{5}$ ， $y = \frac{2}{5}$

17. 設 $x, y, z \in R$ ，且 A, B, C 為不共線三點，若 $(x - y + 2)\vec{AB} + (x + y - 4)\vec{AC} = \vec{0}$ ，求 x, y 。

【解答】 $x = 1$ ， $y = 3$

【詳解】

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x = 1, y = 3$$

18. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = 1$ ， $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$ ，滿足 $\vec{AP} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ ， $-1 \leq \alpha \leq 2$ ， $0 \leq \beta \leq 3$ ，求

P 點所在區域面積為_____。

【解答】 $9\sqrt{3}$

【詳解】

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{所求之面積} = [2 - (-1)] \cdot (3 - 0) \cdot (2\triangle ABC) = 3 \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$