高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.10.01					
範圍	1-2，3 向量及坐標表示法	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 設 $3\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC}$，$\alpha$，$\beta\in R$，若 A，B，C 共線，則 $\alpha+\beta$ 之值為

   (A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2　(E) 3

【解答】(E)

【詳解】$3\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PA}=\frac{\alpha}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{\beta}{3}\overrightarrow{PC}$

$\because$ A，B，C 共線 $\therefore$ $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}=1$ $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=3$

2. 設在平面上若 $\overrightarrow{OA}=(x，5)$，$\overrightarrow{OB}=(2，3)$，$\overrightarrow{OC}=(8，x)$（$x<0$）且 A，B，C 三點共線，則 x 的值為(A) -1　(B) -2　(C) -3　(D) -4　(E) -5

【解答】(A)

【詳解】A，B，C三點共線 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2-x，-2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(8-x，x-5)$

$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{2-x}{8-x}=\frac{-2}{x-5}$

$\Rightarrow$ $(2-x)(x-5)=-2(8-x)$ $\Rightarrow$ $x^2-5x-6=0$

$\Rightarrow$ $(x-6)(x+1)=0$ $\Rightarrow$ $x=-1$，6（6 不合 $\because$ $x<0$）

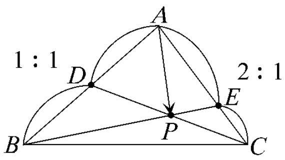
二、填充題(每題 10 分)

1. △ABC中，D是 $\overline{AB}$ 中點，E點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}$ ：$\overline{EC}=2：1$，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於P點，

   (1)設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對$(x，y)=$__________。　(2)求 $\overline{BP}$ ：$\overline{PE}=$__________。

【解答】(1) $(\frac{1}{4}，\frac{1}{2})$　(2) 3：1

【詳解】



(1) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{AE}$（$\because$ $\overline{AE}$ ：$\overline{EC}=2：1$）

$\because$ B，P，E 三點共線 $\therefore$ $x+\frac{3}{2}y=1$……①

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=2x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}$（$\because$ $\overline{AD}$ ：$\overline{DB}=1：1$）

$\because$ D，P，C 三點共線 $\therefore$ $2x+y=1$……②

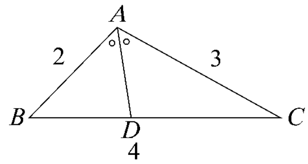
由①②得$(x，y)=(\frac{1}{4}，\frac{1}{2})$

(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ $\Rightarrow$ $\overline{BP}$ ：$\overline{PE}=3：1$

2. 若△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$ 且∠A的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於D點，求

   (1) $\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，求數對$(r,s)=$_______________。(2) $|\overrightarrow{AD}|=$_____________。

【解答】(1) $(\frac{3}{5}，\frac{2}{5})$　　(2) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$



【詳解】

$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$，

內分比性質 $\Rightarrow \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$　$\therefore$　$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{25}|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{25}(9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2)$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=\dfrac{4+9-16}{2}=-\dfrac{3}{2}$

故 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{25}[9\times4+12\times(-\frac{3}{2})+4\times9]=\frac{54}{25}$，即 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{3\sqrt{6}}{5}$

3. $\triangle ABC$之三邊，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$，

(1) G爲$\triangle ABC$之重心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AG}=$ __________ $\overrightarrow{AB}$ + __________ $\overrightarrow{AC}$。

(2) I爲$\triangle ABC$之內心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AI}=$__________ $\overrightarrow{AB}$+__________ $\overrightarrow{AC}$。

【解答】(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AI}=\frac{7}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

【詳解】

(1)對於任意三角形 ABC，G 爲$\triangle ABC$ 之重心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2)$\triangle ABC$ 之三邊 $a=5$，$b=7$，$c=3$

I 爲內心　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{7}{15}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{15}\overrightarrow{AC}$

4. 已知$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=\sqrt{7}$，

(1)K爲外心，若 $\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$(x，y)=$__________。

(2)H爲垂心，若 $\overrightarrow{AH}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，則數對$(r，s)=$__________。

【解答】(1) $(\frac{7}{18}，\frac{4}{9})$　(2) $(\frac{2}{9}，\frac{1}{9})$

【詳解】

(1)

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2)=\frac{1}{2}[2^2+(\sqrt{7})^2-3^2]=1\\ \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=2\\ \overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{7}{2}\end{cases}$$

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=8$　$\Rightarrow$　$4x+y=2$ ……①

$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{25}{2}$　$\Rightarrow$　$x+7y=\frac{7}{2}$ ……②

解①，②得$(x，y) = (\frac{7}{18}，\frac{4}{9})$

(2)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2) = \frac{1}{2}[2^2 + (\sqrt{7})^2 - 3^2] = 1$

H爲垂心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 24$ $\Rightarrow$ $4x + y = 1$……①

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 = 24$ $\Rightarrow$ $x + 7y = 1$……②

解①，②得數對$(x，y) = (\frac{2}{9}，\frac{1}{9})$

5. 若G是$\triangle ABC$的重心，且$\overline{GA} = 3$，$\overline{GB} = 4$，$\overline{GC} = 5$，則$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} =$__________。

【解答】-16

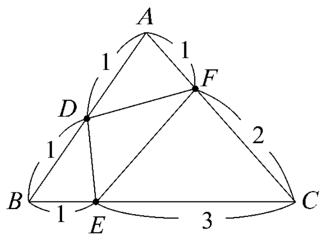
【詳解】

若G爲$\triangle ABC$之重心，則$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$

$\Rightarrow$ $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|^2 = |-\overrightarrow{GA}|^2$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = |\overrightarrow{GA}|^2$

$\Rightarrow$ $4^2 + 5^2 + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 3^2$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = -16$

6. 設$\triangle ABC$中，D，E，F三點分別在$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$上，$\overline{AD} = \overline{DB}$，$\overline{BC} = 4\overline{BE}$，$\overline{CF} = 2\overline{AF}$且$G$是$\triangle DEF$的重心，若$\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$，則$(x，y) =$__________。



【解答】$(\frac{5}{12}，\frac{7}{36})$

【詳解】

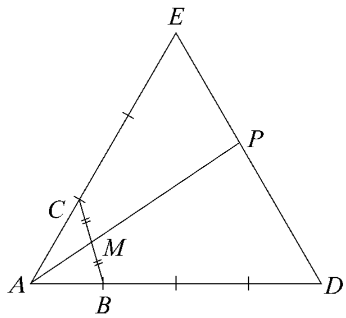
$\because$ G 爲$\triangle DEF$ 的重心

$\therefore$ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$

$= \frac{1}{3}[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}] = \frac{1}{3}(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC})$

$= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{36}\overrightarrow{AC}$，$\therefore$ $(x，y) = (\frac{5}{12}，\frac{7}{36})$

7. $\triangle ABC$中，M爲$\overline{BC}$之中點，$\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$，延長$\overrightarrow{AM}$交$\overline{DE}$於$P$，則$\overrightarrow{AP} =$__________$\overrightarrow{AD} +$__________$\overrightarrow{AE}$。



【解答】 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AE}$

【詳解】

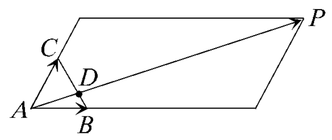
M 爲$\overline{BC}$之中點 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

設$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AM}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{k}{8}\overrightarrow{AD}+\frac{k}{6}\overrightarrow{AE}$

$\because$ D，P，E 三點共線 $\therefore$ $\frac{k}{8}+\frac{k}{6}=1$ $\Rightarrow$ $k=\frac{24}{7}$

故$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{8}\cdot\frac{24}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\cdot\frac{24}{7}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AE}$

8. 設A，B，C三點不共線，$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，令$\overrightarrow{AP}$交$\overleftrightarrow{BC}$於$D$，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x$，$y$之值＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。



【解答】$x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{2}{5}$

【詳解】

$\because$ $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，設$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AP}=3t\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AC}$，$B,D,C$ 共線$\Rightarrow 3t+2t=1, t=\frac{1}{5}$

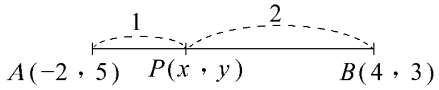
$\therefore$ $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，$\therefore$ $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{2}{5}$

9. 設$A(-2，5)$，$B(4，3)$，P在直線AB上且$\overline{AP}：\overline{PB}=1：2$，則$P$之坐標爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(0，\frac{13}{3})$或$(-8，7)$

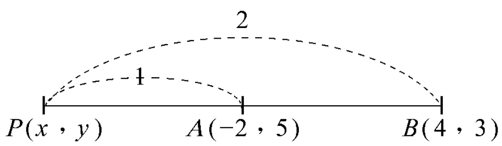
設$P(x，y)$

①若P爲內分點，$\overline{AP}：\overline{PB}=1：2$，則$\begin{cases} x=\frac{1\times4+2\times(-2)}{3}=0 \\ y=\frac{1\times3+2\times5}{3}=\frac{13}{3} \end{cases}$



②若P爲外分點，$\overline{AP}：\overline{PB}=1：2$，則$\overline{AP}：\overline{AB}=1：1$

$\therefore$ $\begin{cases} -2=\frac{1\times4+1\times x}{2} \\ 5=\frac{1\times3+1\times y}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=-8 \\ y=7 \end{cases}$



$\therefore$ P點坐標爲$(0，\frac{13}{3})$或$(-8，7)$

10.△ABC中，$\overline{AB}$之中點$D(5，-2)$，$\overline{BC}$之中點$E(-2，3)$，$\overline{AC}$之中點$F(6，5)$，則△ABC之重心$G=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(3，2)$

【詳解】

$\triangle ABC$ 之重心與$\triangle DEF$ 之重心相同

$\Rightarrow x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{5-2+6}{3}=3$，$y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{-2+3+5}{3}=2$

$\therefore$ $G(3，2)$

11.設$\vec{a}=(8，2)$，$\vec{b}=(3，3)$，$\vec{c}=(6，12)$，$\vec{P}=(6，4)$，$x，y，z\in R$。
若$x+y+z=1$ 且$\vec{P}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ ，則$(x，y，z)$ $=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{3}，\dfrac{1}{6})$

【詳解】

$\vec{P}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ $\Rightarrow$ $(6，4)=x(8，2)+y(3，3)+z(6，12)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}8x+3y+6z=6\\2x+3y+12z=4\end{cases}$

又 $x+y+z=1$，解之得 $x=\dfrac{1}{2}$ ，$y=\dfrac{1}{3}$ ，$z=\dfrac{1}{6}$

12.若$A(3，2)$，$B(5，-1)$，$C(-1，4)$，已知 $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ，則D坐標爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(3，-2)$

【詳解】

設 $D(x，y)$，則 $2\overrightarrow{AB}=2(2，-3)=(4，-6)$，$\overrightarrow{CD}=(x+1，y-4)$

$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ $(4，-6)=(x+1，y-4)$

$\Rightarrow\begin{cases}x+1=4\\y-4=-6\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$，即 D 坐標爲$(3，-2)$

13.設$\vec{a}=(3，-1)$，$\vec{b}=(x，3)$，若$(2\vec{a}+\vec{b})\,//\,(\vec{a}-2\vec{b})$，則$x=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】-9

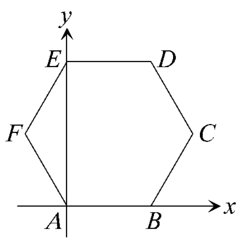
【詳解】

$2\vec{a}+\vec{b}=2(3，-1)+(x，3)=(6+x，1)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(3，-1)-2(x，3)=(3-2x，-7)$

$\because$ $(2\vec{a}+\vec{b})\,//\,(\vec{a}-2\vec{b})$ $\therefore$ $\dfrac{6+x}{3-2x}=\dfrac{1}{-7}$ $\Rightarrow$ $3-2x=-42-7x$ $\Rightarrow$ $x=-9$

14.如右圖，邊長爲 2 的正六邊形$ABCDEF$，若$A(0，0)$，$B(2，0)$，則F點坐標爲＿＿＿＿＿＿＿。



【解答】$(-1，\sqrt{3})$

【詳解】

設 $F(x，y)$，則 $\overrightarrow{AF}=(|\overrightarrow{AB}|\cos 120°，|\overrightarrow{AB}|\sin 120°)$

$\Rightarrow$ $(x，y)=(2\times\dfrac{-1}{2}，2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ $\Rightarrow$ $(x，y)=(-1，\sqrt{3})$

15.設$O(0，0)$，$A(2，1)$，$B(-1，-2)$，$C(-1，0)$，若 $(x^2-3x+2)\overrightarrow{OA}+(x-1)\overrightarrow{OB}+(x^2-2x+1)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

求x之值=__________。

【解答】1，4

【詳解】

$\overrightarrow{OA}=(2，1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1，-2)$，$\overrightarrow{OC}=(-1，0)$

由原式得$\begin{cases}2(x^2-3x+2)-(x-1)-(x^2-2x+1)=0\\(x^2-3x+2)-2(x-1)+0=0\end{cases}$

$\Rightarrow\quad x^2-5x+4=0\quad\Rightarrow\quad(x-4)(x-1)=0\quad\therefore\quad x=1，4$

16.設$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,3)$，$\vec{c}=(-4,-7)$，存在實數r，s使得$\vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}$，則數對$(r,s)=$__________。

【解答】$(2，-3)$

【詳解】

$\vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}\quad\Rightarrow\quad(-4，-7)=r(1，1)+s(2，3)=(r+2s，r+3s)$

$\begin{cases}r+2s=-4\\r+3s=-7\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}r=2\\s=-3\end{cases}$

17.已知△ABC三頂點$A(2，4)$，$B(-1，-5)$，$C(-6，0)$，則△ABC垂心H的坐標是__________。

【解答】$(-3，-1)$

【詳解】

設垂心 $H(x,y)$，$\overrightarrow{AH}=(x-2,y-4),\overrightarrow{BH}=(x+1,y+5),\overrightarrow{BC}=(-5,5),\overrightarrow{AC}=(-8,-4)$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ：$-5(x-2)+5(y-4)$……①

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ：$-8(x+1)-4(y+5)=$……②

解①②，得垂心 $H(-3，-1)$