高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.10.13					
範圍	1-2、3、4 向量	班級		姓名	
		座號			

2-1. $\triangle ABC$中，D在$\overline{BC}$上，E在$\overline{AC}$上且$\overline{CD}:\overline{BD}=2:1$，$\overline{AE}:\overline{EC}=1:3$，若$\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，則數對$(m，n)=$__________。

【解答】$(-\frac{1}{3}，-\frac{5}{12})$

【詳解】

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2}\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$，$\therefore(m，n)=(-\frac{1}{3}，-\frac{5}{12})$

2-2. 已知$\overrightarrow{OC}=(5t+3)\overrightarrow{OA}+(4+t)\overrightarrow{AB}$，且 A，B，C 三點共線，若求 $t=$________。

【解答】$-\frac{2}{5}$

【詳解】

$\overrightarrow{OC}=(5t+3)\overrightarrow{OA}+(4+t)\overrightarrow{AB}=(5t+3)\overrightarrow{OA}+(4+t)(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(4t-1)\overrightarrow{OA}+(4+t)\overrightarrow{OB}$

A，B，C 三點共線$\Rightarrow(4t-1)+(4+t)=1,\quad t=-\frac{2}{5}$

2-3. 若$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=3$，$\angle BAC=120°$，且 P,Q 爲$\overline{BC}$的三等分點點，求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\underline{?}$

【解答】5

【詳解】

$\overline{BP}:\overline{PC}=2:1\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，同理$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos120°=3\times6\times(-\frac{1}{2})=-9$

故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{9}[2|\overrightarrow{AB}|^2+5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2|\overrightarrow{AC}|^2]$

$=\frac{1}{9}[2\times3^2+5(-9)+2\times6^2]$

$=5$

2-4. $\triangle ABC$中，已知$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=2$，$\angle A$的分角線交$\overline{BC}$於D點，求$\overline{AD}$之長__________。

【解答】$\frac{\sqrt{22}}{3}$

【詳解】

$\overline{AD}$爲角平分線，$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:2=2:1$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$|\overrightarrow{AD}|^2=|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{9}[|\overrightarrow{AB}|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2]$$

$$=\frac{1}{9}[\overline{AB}^2+4\times\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}+4\overline{AC}^2]$$

$$=\frac{1}{9}[4^2+4\times\frac{4^2+2^2-5^2}{2}+4\times5^2]=\frac{22}{9}$$

$$\Rightarrow\overline{AD}=\frac{\sqrt{22}}{3}$$

2-5. 設△ABC中，D，E，F三點分別在$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$上，$\overline{BD}:\overline{CD}=1:1,\overline{CE}:\overline{EA}=2:1$，$\overline{AF}:\overline{FB}=3:2$，且$G$是△$DEF$的重心，若$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則$(x，y)=$__________。

【解答】$(\frac{11}{30}，\frac{5}{18})$

【詳解】

∵ G 爲△DEF 的重心

∴ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

$$=\frac{1}{3}[(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}]=\frac{1}{3}(\frac{11}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC})=\frac{11}{30}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AC}$$

2-6. △ABC中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=2$，$\overline{BC}=\sqrt{11}$，又H爲△ABC的垂心，若$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x，y)=$__________。

【解答】$(\frac{3}{35}，\frac{8}{35})$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)=\frac{1}{2}(9+4-11)=1$

H爲垂心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $9x+y=1$……①

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$ $\Rightarrow$ $x+4y=1$……②

解①，②得數對$(x，y)=(\frac{3}{35}，\frac{8}{35})$

2-7. 已知△ABC中，O爲外心，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$，$\angle BAC=60°$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$(x，y)=$__________。

【解答】$(\frac{1}{6}，\frac{4}{9})$

【詳解】

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos60°=4\times6\times\frac{1}{2}=12\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=8\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=18\end{cases}$$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\quad\Rightarrow\quad 16x+12y=8\cdots\cdots$①

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\ |\overrightarrow{AC}|^2\quad\Rightarrow 12x+36y=18\cdots\cdots$②

解①，②得$(x，y)=(\frac{1}{6}，\frac{4}{9})$

2-8. 如圖，A、B、O不共線，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$，$\overline{AD}$與$\overline{BC}$交於$P$點，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求數對$(x，y)=$__________。

【解答】 $(\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$

【詳解】

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=x(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC})+y\overrightarrow{OB}$（$\because\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$ ）

$\because$ B，P，C 三點共線 $\therefore$ $\frac{1}{3}x+y=1\cdots\cdots$①

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+y(\frac{1}{2}\overrightarrow{OD})$（$\because\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$ ）

$\because$ D，P，A 三點共線 $\therefore$ $x+\frac{1}{2}y=1\cdots\cdots$②

由①②得$(x，y)=(\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$

3-1. 設$A(5,1),B(3,5),C(1,6)$，若$\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$，則$P$點的坐標爲__________。

【解答】$(3,-4)$

【詳解】設$P(x,y)\Rightarrow\overrightarrow{AP}=(x-5,y-1)$

$\overrightarrow{AB}=(3-5,5-1)=(-2,4);\overrightarrow{BC}=(1-3,6-5)=(-2,1);\overrightarrow{AC}=(-4,5)$

$\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow(x-5,y-1)=-3(-2,4)+2(-2,1)+(-4,5)$

$(x-5,y-1)=(6-4-4,-12+2+5)\Rightarrow(x,y)=(3,-4)$

3-2. 設$\vec{a}=(4，3)$，$\vec{b}=(x，-2)$，若$(2\vec{a}-\vec{b})//(\vec{a}+2\vec{b})$，求 x 之值 =______________。

【解答】$-\frac{8}{3}$

【詳解】

$2\vec{a}-\vec{b}=(8-x，8)$，$\vec{a}+2\vec{b}=(4+2x，-1)$

$(2\vec{a}-\vec{b})//(\vec{a}+2\vec{b})\Rightarrow\quad\frac{8-x}{4+2x}=\frac{8}{-1},\quad -(8-x)=8(4+2x)\Rightarrow x=-\frac{8}{3}$

3-3. 如圖，設$\overline{OA}=1,\overline{AB}=2,\overline{BC}=4,\overline{CD}=8,$且$\theta=30°$，求 D 點坐標____________。

【解答】$(\sqrt{3}-1,1+6\sqrt{3})$

【詳解】

$\overrightarrow{OA}=(1,0)$

$\overrightarrow{AB}=(2\cos30°,2\sin30°)=(\sqrt{3},1)$

$\overrightarrow{BC}=(4\cos 60°,4\sin 60°)=(2,2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{CD}=(8\cos 120°,8\sin 120°)=(-4,4\sqrt{3})$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(1+\sqrt{3}+2-4,0+1+2\sqrt{3}+4\sqrt{3})=(\sqrt{3}-1,1+6\sqrt{3})$

$\Rightarrow D\ (\sqrt{3}-1,1+6\sqrt{3})$

3-4. 設$A(-4，14)$，$B(1，4)$，P在直線AB上且$\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$=3：2，則P之坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(-1,8)$或$(11,-16)$

【詳解】設 $P(x，y)$

①若 P 爲內分點，$\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$= 3：2，則$\begin{cases} x=\dfrac{3\times 1+2\times(-4)}{3+2}=-1 \\ y=\dfrac{3\times 4+2\times 14}{3+2}=8 \end{cases}$ $\Rightarrow P(-1,8)$

②若 P 爲外分點，$\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$= 3：2，則$\begin{cases} x=\dfrac{3\times 1+(-2)\times(-4)}{3-2}=11 \\ y=\dfrac{3\times 4+(-2)\times 14}{3-2}=-16 \end{cases}$ $\Rightarrow P(11,-16)$

3-5. 設直線的參數方程式分別爲L_1：$\begin{cases} x=5+3t \\ y=-7-2t \end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+7t \end{cases}$，$t\in R$，求$L_1$與$L_2$的交點爲＿＿＿＿＿。

【解答】 (2，-5)

【詳解】

(1) L_1：$\begin{cases} x=5+3t \\ y=-7-2t \end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases} x=1-s \\ y=2+7s \end{cases}$，$s\in R$，則$\begin{cases} 5+3t=1-s \\ -7-2t=2+7s \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} 3t+s=-4\cdots\cdots ① \\ -2t-7s=9\cdots\cdots ② \end{cases}$

解①，② $\Rightarrow$ $t=-1$，$s=-1$，故L_1與L_2的交點爲(2，-5)

3-6. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$ 且 $A(3,6)$, $B(1,5)$, $C(4,1)$, $\overline{AD}=3$ ，則 D 點坐標＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\dfrac{24}{5},\dfrac{18}{5})$

【詳解】設 $D(x,y)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(x-3,y-6)$ ，且 $\overrightarrow{BC}=(4-1,1-5)=(3,-4)$

又 $\overline{AD}//\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}=3\Rightarrow\overrightarrow{AD}=3(\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|})=3\dfrac{(3,-4)}{5}=(\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5})$

$(x-3,y-6)=(\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5})\Rightarrow(x,y)=(\dfrac{24}{5},\dfrac{18}{5})$

3-7. 設一平面上 $A(3，1)$，直線 L：$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2-t \end{cases}$，$t\in R$，則 A 點到直線 L 的最短距離長 =＿＿＿＿。

【解答】$2\sqrt{5}$

【詳解】直線 L：$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2-t \end{cases}$，$t \in R \Rightarrow x+2y+5=0$， $d(A；L)=\dfrac{|3+2\cdot 1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

3-8. 有一颱風中心在清晨零時位於$A(4，-6)$，清晨 2 時已到$B(1，0)$，若此一颱風做等速直線行進，求上午 8 時颱風中心所在的坐標位置爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(-8,18)$

【詳解】

颱風路線方向向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,6)=2(-\dfrac{3}{2},3)$

颱風中心清晨 t 時位置在:$\begin{cases} x=4-\dfrac{3}{2}t \\ y=-6+3t \end{cases} \Rightarrow t=8$, 颱風中心在 $(4-\dfrac{3}{2}\times 8,-6+3\times 8)=(-8,18)$

4-1. 設$\overrightarrow{OA}=(-12，1)$，$\overrightarrow{OB}=(-2，5)$，若$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}$，且$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，則$\overrightarrow{OD}=$＿＿＿＿。

【解答】$(22,3)$

【詳解】$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}\Rightarrow$ 設 $\overrightarrow{OC}=t(5,2)=(5t,2t)$ ，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(5t+2,2t-5)$

因爲 $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{OA}\Rightarrow(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})//\overrightarrow{OA}$ ，$\dfrac{5t+2}{-12}=\dfrac{2t-5}{1}\Rightarrow 5t+2=-24t+60, t=2\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(10,4)$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(10+12,4-1)=(22,3)$

4-2. 若L_1：$\begin{cases} x=-3+t \\ y=4-2t \end{cases}, t\in R$，$L_2$：$\begin{cases} x=3t \\ y=5-t \end{cases}, t\in R$，則$L_1$與$L_2$之夾角$\theta$ 爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$ $(45^\circ,135^\circ)$

【詳解】L_1及L_2之方向向量，分別爲 $\overrightarrow{v_1}=(1，-2)$，$\overrightarrow{v_2}=(3，-1)$

$$\text{則}\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}=\pm\dfrac{1\times 3+(-2)\times(-1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}$$

4-3. 平面上三點 $A(-4,-1), B(6,4), C(-1,3)$ ，則 B 在直線 AC 上的投影點爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(2,7)$

【詳解】向量 $\overrightarrow{AB}=(10，5)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(3，4)$，

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影 $=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC}=(\dfrac{30+20}{25})(3，4)=(6，8)$

設 B 在直線 AC 上的投影點爲 $D(x,y)\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(x+4,y+1)=(6,8)\Rightarrow D(x,y)=(2,7)$

4-4. 設$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$ 若 $|\overrightarrow{a}|=4$，$|\overrightarrow{b}|=5$，$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=6$，求$\triangle ABO$面積＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

【詳解】

$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=6 \Rightarrow |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=6^2 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=36$，得 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{5}{2}$

$\triangle ABO$之面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2\times5^2-(\dfrac{5}{2})^2}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

4-5. 坐標平面上二點$A(-5，3)$，$B(2，1)$，若直線$x-2y+3=0$交$\overline{AB}$於P點，求 $\overline{AP}$ ： $\overline{BP}=$ ________。

【解答】8：3

【詳解】$\overline{AP}$ ： $\overline{BP}=d(A；L)：d(B；L)=\dfrac{|-5-6+3|}{\sqrt{1+4}}$ ： $\dfrac{|2-2+3|}{\sqrt{1+4}}=8：3$

4-6. 平面上$P(x，y)$為直線$L:3x+4y-2=0$上，求$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$ 最小值 $=$ ____________。

【解答】 $\dfrac{13}{5}$

【詳解】設 $Q(-5，1)$；$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$ 最小值 $=d(Q；L)=\dfrac{|-15+4-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13}{5}$

4-7. 已知x，y為實數且 $3x-2y=4$，則 $3x^2+2y^2$的最小值為________________。

【解答】$\dfrac{16}{5}$

【詳解】

$$\begin{matrix}\sqrt{3}x & \sqrt{2}y\\ \sqrt{3} & -\sqrt{2}\end{matrix}$$

柯西不等式知$(3x-2y)^2\le[(\sqrt{3}\,x)^2+(\sqrt{2}\,y)^2][(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2] \quad \Rightarrow 16\le(3x^2+2y^2)\cdot5$

$\therefore \quad \Rightarrow \dfrac{16}{5}\le 3x^2+2y^2$ ，即 $3x^2+2y^2$的最小值為$\dfrac{16}{5}$

4-8. 設$L：2x+y-5=0$，試求過點$(4，3)$且與L之一夾角為$\dfrac{\pi}{4}$的直線方程式________。

【解答】$3x-y=9$ 或 $x+3y=13$

【詳解】設所求直線之斜率為 m，且方程式為$(y-3)=m(x-1)\Rightarrow mx-y-m+3=0$

$L：2x-y+3=0$，則 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\pm(\dfrac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{2^2+1^2}})$

兩邊平方 $\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{(2m+1)^2}{5(m^2+1)}\Rightarrow 5(m^2+1)=2(2m+1)^2$ 　即$3m^2+8m-3=0$

$(3m-1)(m+3)=0\Rightarrow \quad m=-3$ 或 $m=\dfrac{1}{3}$

所求為$(y-3)=-3(x-4)$或$(y-3)=\dfrac{1}{3}(x-4)$，即 $3x-y=9$ 或 $x+3y=13$