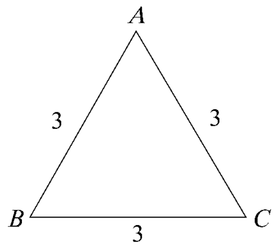
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：97.09.17</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">1-1 有向線段與向量(2)</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. 若正三角形 ABC 的周長為 9，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值=(A) $\frac{3}{2}$　(B) $\frac{9}{2}$　(C) 3　(D) $\frac{1}{2}$　(E) $\frac{7}{2}$

【解答】(B)



【詳解】

《Sol 一》 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=3\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=\frac{9}{2}$

《Sol 二》 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=\frac{3^2+3^2-3^2}{2}=\frac{9}{2}$

2. 設一平面上二向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ ，若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 120°　(E) 150°

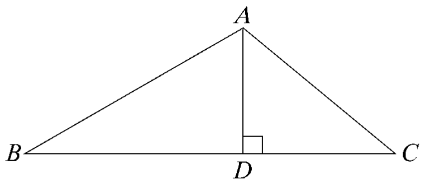
【解答】(D)

【詳解】

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \Rightarrow (\sqrt{13})^2=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2 \Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-12 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

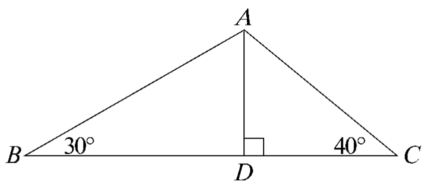
$\therefore\ \cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-6}{3\times 4}=\frac{-1}{2}$，$\alpha=120^\circ$

3. 如右圖，$\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 的高，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=40^\circ$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ 甲，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=$乙，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=$丙，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$丁，則甲乙丙丁中有幾個小於 0？(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 4



【解答】(C)

【詳解】



甲= $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 150^\circ<0$

乙= $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}|\cos 90^\circ=0$

丙= $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos 40^\circ>0$

丁= $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 110^\circ<0$，$\therefore$　其中甲、丁 2 個小於 0

4. 設 $\vec{u}$ ，$\vec{v}$ 在一平面上且不平行，若 $(x+y-3)\vec{u}+(x-y+1)\vec{v}=\vec{0}$ ，則 $x-2y$ 的值=

(A) 2　(B) 3　(C) 0　(D) −2　(E) −3

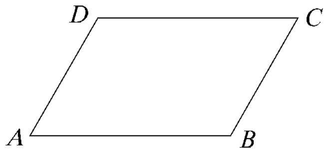
【解答】(E)

【詳解】

$(x+y-3)\vec{u}+(x-y+1)\vec{v}=\vec{0}=0\vec{u}+0\vec{v}$

$\begin{cases}x+y-3=0\\x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\quad\therefore\quad x-2y=-3$

5. (複選)就平行四邊形 $ABCD$ 而言，下列敘述何者正確？



(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$　　(B) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$　　(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=0$　　(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(A)如圖， $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(B)$\because$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\therefore$ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{CD}|$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$（不可寫作 0）

(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設A，B，C表相異三點，則$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$__________。

【解答】$\overrightarrow{CB}$

【詳解】$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

2. 設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$ 且 $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$ ，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________。

【解答】$\dfrac{53}{4}$

【詳解】

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$

$2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad 2\vec{a}+3\vec{b}=4\vec{c} \quad\Rightarrow\quad |2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|4\vec{c}|^2$

$\Rightarrow\quad 4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=16|\vec{c}|^2 \quad\Rightarrow\quad 16+12\vec{a}\cdot\vec{b}+81=256 \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{53}{4}$

3. 在$\triangle ABC$中，若$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=5$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$之值 $=$__________。

【解答】-30

【詳解】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2}=-\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2}\quad -30$

4. 設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ，求

(1)$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$__________。　(2)$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________。

【解答】(1) $-\dfrac{29}{2}$　(2) $\dfrac{3}{2}$

【詳解】

(1) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{0}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{-1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=\dfrac{-29}{2}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|-\vec{c}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2 \Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)=\dfrac{3}{2}$

5. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ ，則 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__________。

【解答】$\sqrt{37}$

【詳解】

由 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2=13\Rightarrow|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13\Rightarrow16+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=13\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+12+9=37\quad\therefore\quad|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$

6. 設 $|\vec{u}|=4$，$|\vec{v}|=7$，且已知$\vec{u}$和$\vec{v}$的夾角爲 60°，則 $|\vec{u}-2\vec{v}|$ 之值爲__________。

【解答】$2\sqrt{39}$

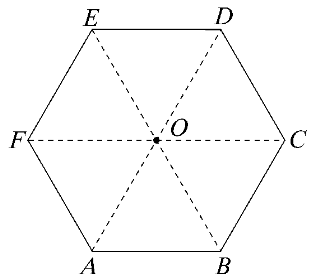
【詳解】

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos60°=4\times7\times\dfrac{1}{2}=14$

$|\vec{u}-2\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4|\vec{v}|^2=16-4\times14+4\times49=156\Rightarrow\quad|\vec{u}-2\vec{v}|=2\sqrt{39}$

7. 設$ABCDEF$爲一正六邊形，請將$\overrightarrow{AE}$表成$r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$的形式__________。

【解答】$-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$



【詳解】

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$

8. 設 $|\vec{u}|=2$，$|\vec{v}|=3$，且 $|\vec{u}|$ 與 $|\vec{v}|$ 之間的夾角爲 120°，求向量 $3\vec{u}-2\vec{v}$ 的長度爲__________。

【解答】$6\sqrt{3}$

【詳解】

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos120°=2\times3\times\dfrac{-1}{2}=-3$

$|3\vec{u}-2\vec{v}|^2=9|\vec{u}|^2-12\vec{u}\cdot\vec{v}+4|\vec{v}|^2=9\times2^2-12\times(-3)+4\times3^2=108\Rightarrow\quad|3\vec{u}-2\vec{v}|=6\sqrt{3}$

9. A，B，C三點，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-8$，則$\cos A=$__________，$|\overrightarrow{BC}|=$__________。

【解答】$\dfrac{-2}{3}$，$\sqrt{21}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A-|\overrightarrow{AB}|^2$

$\Rightarrow\quad-8=2\times3\times\cos A-2^2\quad\Rightarrow\quad\cos A=\dfrac{-2}{3}$

(2) $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2=3^2-2\times2\times3\times(\dfrac{-2}{3})+2^2=21$

$\therefore\quad|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{21}$

10.設 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角爲 60°，則$\vec{a}+\vec{b}$ 與$\vec{b}-2\vec{a}$之夾角 $=$__________。

【解答】120°

【詳解】

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，夾角 60° $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60°=\dfrac{1}{2}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1+1=3 \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$

$|\vec{b}-2\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=1+4-2=3 \Rightarrow |\vec{b}-2\vec{a}|=\sqrt{3}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{a}|^2=1-\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

設θ為$\vec{a}+\vec{b}$與$\vec{b}-2\vec{a}$之夾角 $\Rightarrow$ $\cos\theta=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{b}-2\vec{a}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=120°$

11. $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，若$(\vec{a}+\vec{b})\perp(5\vec{a}-2\vec{b})$，則$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為__________。

【解答】$\dfrac{\pi}{3}$

【詳解】∵ $(\vec{a}+\vec{b})\perp(5\vec{a}-2\vec{b})$ ∴ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0$

$\Rightarrow$ $5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$……①，將 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$代入①

$\Rightarrow$ $5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot(4|\vec{a}|^2)=0$ $\Rightarrow$ $3\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{a}|^2$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\cdot2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$ ∴ $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

12. 若 $|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，且 $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}=\vec{0}$，則$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影量（分量）為__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}$

【詳解】$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影量（分量）$=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\times\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overline{AC}}$

∵ $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$

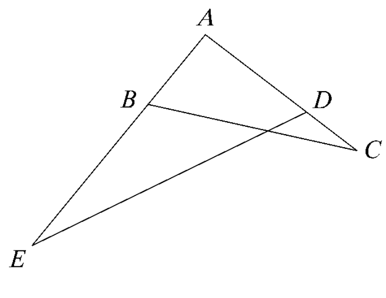
$\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|=|3\overrightarrow{AD}|$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4\overline{AC}^2=9\overline{AD}^2$

$\Rightarrow$ $16+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4(4)=9(4)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

∴ $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影量為$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$

13.設△ABC中，D是$\overline{AC}$上的一點，$\overline{AD}=\dfrac{2}{3}\overline{AC}$，$E$是$\overline{AB}$延長線上的一點，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$，把$\overrightarrow{DE}$表成$r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$的形式為__________。



【解答】$3\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

【詳解】 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$