

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.06.12				
範圍	3-3 期望值	班級		姓名
		座號		

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)投擲公正骰子 n 個 ($n \in N$)，點數和的期望值為 E_n ，下列何者正確？

(A) $E_2 = 7$ (B) $E_4 = 14$ (C) $E_8 = 28$ (D) $E_{10} = 35$ (E) $E_{2n} = 7n$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$$E_1 = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}, \text{ 又 } E_n = nE_1 = \frac{7n}{2}$$

$$\therefore E_2 = 7, E_4 = 14, E_8 = 28, E_{10} = 35, E_{2n} = 7n$$

二、填充題(每題 10 分)

1. 若擲一均勻硬幣三次，出現一次正面得 10 元，一次反面賠 4 元，則所得金額的期望值為_____元。

【解答】9 元

【詳解】

$$3 \times [10 \times \frac{1}{2} + (-4) \times \frac{1}{2}] = 9$$

2. 袋中有鈔票 1000 元 4 張，500 元 3 張，100 元 3 張，每張被取到的機會相等，今任取 3 張，則所得錢數的期望值為_____元。

【解答】1740 元

【詳解】

任取 3 張錢數之期望值是任取一張錢數期望值之 3 倍

$$\Rightarrow \text{所求期望值} = 3 \cdot (1000 \times \frac{4}{10} + 500 \times \frac{3}{10} + 100 \times \frac{3}{10}) = 1740$$

3. A袋中有 100 元 5 張，10 元 3 張，1 元 4 張，B袋中有 10 元鈔票 10 張，

(1)自A袋中任取二張，其期望值為_____。

(2)自A袋中取一張放入B袋，再自B袋取二張，求期望值為_____。

【解答】(1) 89 (2) $\frac{289}{11}$

【詳解】

$$(1) E = 2(100 \times \frac{5}{12} + 10 \times \frac{3}{12} + 1 \times \frac{4}{12}) = 89$$

$$(2) E = 2(\frac{89}{2} \times \frac{1}{11} + 10 \times \frac{10}{11}) = 2 \times \frac{289}{22} = \frac{289}{11}$$

4. 一盒子中有 5 個紅球，3 個白球，且每球被取的機率相同，

(1)若一次取一球，則取到白球個數的期望值為_____。

(2)若一次取三球，則取到白球個數的期望值為_____。

【解答】(1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{9}{8}$

【詳解】

(1) 一次取一球，取到白球的機率 = $\frac{3}{8}$ ，所以取到白球個數的期望值 = $1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

(2) 取到白球個數的機率分布如下

個數	0	1	2	3
機率	$\frac{C_3^5}{C_3^8}$	$\frac{C_1^3 \times C_2^5}{C_3^8}$	$\frac{C_2^3 \times C_1^5}{C_3^8}$	$\frac{C_3^3}{C_3^8}$

取到白球個數的期望值 $E(X) = 1 \times \frac{C_1^3 C_2^5}{C_3^8} + 2 \times \frac{C_2^3 C_1^5}{C_3^8} + 3 \times \frac{C_3^3}{C_3^8} = \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}$

即 $3 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$

5. 袋中 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個， \dots ， n 號球 n 個 ($n \in N$)，取到 k 號球可得 k 元 ($1 \leq k \leq n$)，假設任取一球得錢的期望值為 E_n 元，(1) $E_{10} =$ _____。 (2) $E_n =$ _____。

【解答】 (1) 7 (2) $\frac{2n+1}{3}$

【詳解】

$$E_n = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{k}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}，故 E_{10} = \frac{2 \times 10 + 1}{3} = 7$$

6. 一袋中有 10 元硬幣 3 個，5 元硬幣 x 個，每個硬幣被取的機會相同，

(1) 若從中取一個硬幣時，取得金額的期望值為 8 元，則 $x =$ _____。

(2) 若 $x = 4$ ，則從中取兩個硬幣可得的金額之期望值為 _____ 元。

【解答】 (1) 2 (2) $\frac{100}{7}$

【詳解】

(1) 期望值 $E(X) = 8 = 10 \times \frac{3}{x+3} + 5 \times \frac{x}{x+3}$ ，即 $8x + 24 = 30 + 5x$ ，所以 $x = 2$

(2) 期望值 $E(X) = 20 \times \frac{C_2^3}{C_2^7} + 15 \times \frac{C_1^3 C_1^4}{C_2^7} + 10 \times \frac{C_2^4}{C_2^7} = 20 \times \frac{1}{7} + 15 \times \frac{4}{7} + 10 \times \frac{2}{7} = \frac{100}{7}$ (元)

7. 某次考試中，有一部分試題採用複選擇題，每題有五個敘述，其中正確的敘述可能不只一個，但也可能一個也沒有，必須完全選對才得 5 分，否則倒扣 k 分。某考生決定靠運氣瞎猜，而此部分得分期望值為 0，若他對單獨一題猜對的機率為 P ，則 $P =$ _____， $k =$ _____。

【解答】 $\frac{1}{32}$ ； $\frac{5}{31}$

【詳解】

每題有 5 個敘述，猜答方式有 $2^5 = 32$ 種，答對只有一種，故 $P = \frac{1}{32}$

又答對得 5 分，答錯倒扣 k 分且期望值為 0 $\therefore 5 \times \frac{1}{32} + (-k) \times \frac{31}{32} = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{31}$

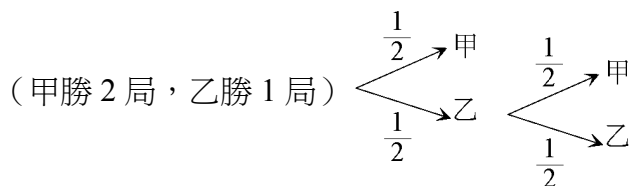
8. 甲、乙兩人下棋，兩人棋力相當，規定先勝 3 局者可得獎金 1000 元，且每局均須分出勝負，不許和局。今兩人進行到甲勝 2 局，乙勝 1 局時，比賽因故停止，依公平的原則，來分此 1000

元獎金，則甲應得_____元。

【解答】750

【詳解】

若比賽不終止，繼續比到先勝3局才停，其情形有



∴ 甲先勝3局的機率 = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ，故甲應得 $1000 \times \frac{3}{4} = 750$ 元

9. 甲、乙二人下棋為賭，約定先贏3局者勝，敗者付給勝者1000元，已知甲、乙二人棋藝相等，現於甲勝2局、乙勝1局時，比賽因故中止且決定不再比賽，如按機率處理，乙應付給甲_____元才合理。

【解答】500元

【詳解】

在甲勝2局，乙勝1局時，繼續比賽，則

$$\text{甲勝的機率} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(甲)(乙，甲)

$$\text{乙勝的機率} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

∴ 甲得款額的期望值 $1000 \times \frac{3}{4} + (-1000) \times \frac{1}{4} = 500$ ，乙應給甲500元才算合理

9. 投擲三個均勻的硬幣一次，若出現三正面得12元，二正面得8元，一正面得4元，為使賭局公平，出現三反面應賠_____元。

【解答】40

【詳解】

設出現三反面應賠 x 元，則

得款數	12	8	4	$-x$
機率 p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\text{公平期望值 } E = 0 \Rightarrow 12 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + (-x) \times \frac{1}{8} = 0, \therefore x = 40, \text{ 即賠 } 40 \text{ 元}$$

10. 某人參加保齡球賽，每場比賽得勝機率為 $\frac{1}{3}$ ，失敗機率為 $\frac{2}{3}$ 。今參加五場比賽，規定勝一場

可得獎金1000元，敗一場罰款400元，則

(1)此人至少贏得3000元的機率為_____。(2)此人獲得獎金的期望值為_____。

【解答】(1) $\frac{11}{243}$ (2) $\frac{1000}{3}$ 元

【詳解】

(1)此人至少贏3000元，則五場比賽中須勝4場輸1場或勝5場

$$\therefore \text{至少贏 3000 元的機率} = C_4^5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) + C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{10+1}{243} = \frac{11}{243}$$

(2)

比賽結果	5 勝	4 勝 1 負	3 勝 2 負	2 勝 3 負	1 勝 4 負	5 負
所得款額	5000	3600	2200	800	- 600	- 2000
機率	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$C_4^5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)$	$C_3^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2$	$C_2^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$	$C_1^5 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$

$$\begin{aligned} \text{期望值} &= 5000 \left(\frac{1}{3}\right)^5 + 3600 C_4^5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) + 2200 C_3^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 800 C_2^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \\ &\quad 600 C_1^5 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 2000 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{1000}{3} \text{ (元)} \end{aligned}$$

$$\text{即} \left[1000 \times \frac{1}{3} + (-400) \times \frac{2}{3} \right] \times 5 = \frac{1000}{3}$$

11. 十個樣品中有 2 個不良品，今取出 3 個，求含有不良品的期望值_____個。

【解答】 $\frac{3}{5}$

【詳解】

取到 0 個不良品的機率為 $\frac{C_3^8}{C_3^{10}}$ ，

取到 1 個不良品的機率為 $\frac{C_2^8 \cdot C_1^2}{C_3^{10}}$

取到 2 個不良品的機率為 $\frac{C_1^8 \cdot C_2^2}{C_3^{10}}$

$$\text{故取出不良品之期望個數為 } 0 \cdot \frac{C_3^8}{C_3^{10}} + 1 \cdot \frac{C_2^8 \cdot C_1^2}{C_3^{10}} + 2 \cdot \frac{C_1^8 \cdot C_2^2}{C_3^{10}} = \frac{56}{120} + \frac{16}{120} = \frac{3}{5}$$

12. 一袋中有 10 個樣品，其中有 2 個不良品。今自袋中任取一個樣品，取得良品則放回，直到取到不良品才停止，試求所取樣品次數的期望值為_____。

【解答】5 次

【詳解】

每次取出良品的機率 = $\frac{4}{5}$ ，不良品的機率 = $\frac{1}{5}$

$$\therefore \text{期望值 } E = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}E = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \frac{1}{5} + \dots$$

兩式相減得

$$\frac{1}{5}E = 1 \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} + \dots = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 1 \Rightarrow E = 5 \text{ 次}$$

13. 將 5 個大小形狀相同，顏色不同的球，全投入 3 個不同的袋子中，則

(1) 每個袋子中均有球的機率為_____。(2) 空袋子個數的期望值為_____個。

【解答】(1) $\frac{50}{81}$ (2) $\frac{32}{81}$

【詳解】

5 個不同顏色的球放入 3 個不同的袋子中，其放入法有 $3^5 = 243$ 種

(1) 每個袋子均有球，依個數安排可分成兩類 $\begin{cases} (3, 1, 1) \\ (2, 2, 1) \end{cases}$

故放法有 $C_3^5 \times C_1^2 \times C_1^1 \times \frac{3!}{2!} + C_2^5 \times C_2^2 \times C_1^1 \times \frac{3!}{2!} = 60 + 90 = 150$ ，所求機率為 $\frac{150}{243} = \frac{50}{81}$

(2)

空袋子個數	0	1	2
機 率	$\frac{150}{243}$	$\frac{90}{243}$	$\frac{3}{243}$

\therefore 空袋子個數的期望值 $= 0 \times \frac{150}{243} + 1 \times \frac{90}{243} + 2 \times \frac{3}{243} = \frac{96}{243} = \frac{32}{81}$

14. 袋中有編號 1, 2, 3 的三個白球，編號 1, 2, 3, 4 的四個紅球，編號 1, 2, 3, 4, 5 的五個黑球，今任意抽取兩球，求

(1) 兩球不同色的機率為_____。(2) 兩球號碼和的期望值為_____。

【解答】(1) $\frac{47}{66}$ (2) $\frac{31}{6}$

【詳解】

$\begin{cases} \text{白} : 1, 2, 3 \\ \text{紅} : 1, 2, 3, 4 \\ \text{黑} : 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$

(1) $\frac{C_1^3 C_1^4 + C_1^4 C_1^5 + C_1^5 C_1^3}{C_2^{12}} = \frac{12 + 20 + 15}{66} = \frac{47}{66}$

(2) $[\frac{(1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5)}{12}] \times 2 = \frac{31}{6}$

15. 五骰子投擲一次，若五骰子同點，則可得 1200 元，若恰四骰子同點，則可得 600 元，則投擲一次之期望值為_____元。

【解答】 $\frac{25}{2}$

【詳解】

獎金	1200	600
機率	$6 \times (\frac{1}{6})^5$	$C_1^6 \times C_1^5 \times \frac{5!}{4!} \times (\frac{1}{6})^5$
		↑ xxxxy

\therefore 期望值為 $1200 \times (\frac{1}{6})^4 + 600 \times \frac{25}{6^4} = \frac{25}{2}$ 元

16. 設擲一骰子三次，則

(1) 出現 6 點次數的期望值為_____。(2) 出現質數點次數的期望值為_____。

【解答】(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$

【詳解】

(1) 擲一骰子三次，設 X 表示出現 6 點的次數，則其機率分布

X	0	1	2	3
機率	$\frac{125}{216}$	$\frac{3 \times 5^2}{216}$	$\frac{3 \times 5}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$\text{期望值 } E(X) = 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

(2) 設出現質數點的次數以 X 表示，則其機率分布

X	0	1	2	3
機率	$\frac{27}{216}$	$\frac{3 \times 27}{216}$	$\frac{3 \times 27}{216}$	$\frac{27}{216}$

$$\text{期望值 } E(X) = 1 \times \frac{81}{216} + 2 \times \frac{81}{216} + 3 \times \frac{27}{216} = \frac{324}{216} = \frac{3}{2}$$

17. 根據統計資料知，一個 50 歲的人，在一年內存活的機率為 98.5%，今有一個 50 歲的人參加一年期保險額度為五十萬元的人壽保險，須繳保費一萬元，則保險公司獲利的期望值為_____元。

【解答】2500（元）

【詳解】

保險公司獲利的期望值 = $98.5\% \times 10000 + 1.5\% \times (10000 - 500000) = 2500$ （元）

18. 袋中有 8 個球，其中有 2 個白球，取球機會相等，求

(1) 任取 3 球，則取得白球數的期望值為_____。

(2) 每次取 1 球，取後放回，於第 k 次始取到白球，則取到白球次數的期望值為_____。

【解答】(1) $\frac{3}{5}$ (2) 5

【詳解】

$$(1) E = 3 \times \frac{2}{10} = \frac{3}{5} \quad (2) E = \frac{1}{P} = 5$$

19. 某麵包店將前一天未賣完的麵包二個（隔夜麵包），與今天現烤出的 10 個麵包混在一起販賣。

某人至該店買麵包，隨機在此十二個麵包中拿了三個（假設每個麵包被選取的機會相等），則此人買到隔夜麵包的期望值為_____。

【解答】 $\frac{1}{2}$

【詳解】

買到隔夜麵包個數	0	1	2
機率	$\frac{C_0^2 C_3^{10}}{C_3^{12}}$	$\frac{C_1^2 C_2^{10}}{C_3^{12}}$	$\frac{C_2^2 C_1^{10}}{C_3^{12}}$

$$\therefore \text{期望值} = 0 \times \frac{C_0^2 C_3^{10}}{C_3^{12}} + 1 \times \frac{C_1^2 C_2^{10}}{C_3^{12}} + 2 \times \frac{C_2^2 C_1^{10}}{C_3^{12}} = 0 + \frac{9}{22} + \frac{2}{22} = \frac{1}{2}$$

20.同時擲 3 粒骰子，如果恰有兩粒點數相同時，可得 200 元獎金，3 粒點數都相同時，可得 500 元獎金，其餘的都沒獎金，求此試驗得獎金的期望值=_____元。

【解答】 $\frac{200}{9}$

【詳解】

設得獎金的金額以 X 表示，則其機率分布

X	0	200	500
機率	$\frac{120}{216}$	$\frac{6 \times 5 \times 3}{216}$	$\frac{6}{216}$

$$\text{期望值 } E(X) = 200 \times \frac{90}{216} + 500 \times \frac{6}{216} = \frac{4800}{216} = \frac{200}{9} \text{ (元)}$$

21.某同學參加電視機智問答。設有甲、乙兩套題目，甲套較難，乙套較易，但兩套題目無關。比賽規則是：參加者可決定先選哪一套題目，由主持人在該套題目中隨機選取一題，若參加者答對，則主持人在另一套題目中隨機選取一題令參加者作答，若第一次答錯，則立即退出比賽。設只答對甲套題目的獎金是 1200 元，只答對乙套題目的獎金是 800 元，兩題皆答對的獎金是 3000 元，若該同學已知答對甲套題目的機率為 0.6，答對乙套題目的機率是 0.9，問他應選哪套題目作答比較有利？

【解答】乙套

【詳解】

(1)①設 S_1, S_2 分別表答對甲、乙套題目的事件，依題意 $P(S_1) = 0.6, P(S_2) = 0.9$

②先選甲套之獎金期望值

$$\begin{aligned} &= 0 + 1200 \times 0.6 \times (1 - 0.9) + 3000 \times 0.6 \times 0.9 \\ &\quad \text{(甲套答錯)} + \quad \text{(答對甲，而答錯乙)} + \quad \text{(答對甲又答對乙)} \\ &= 0 + 72 + 1620 = 1692 \end{aligned}$$

③先選乙套之獎金期望值

$$\begin{aligned} &= 0 + 800 \times 0.9 \times (1 - 0.6) + 3000 \times 0.6 \times 0.9 \\ &\quad \text{(乙套答錯)} + \quad \text{(答對乙，而答錯甲)} + \quad \text{(答對乙又答對甲)} \\ &= 1908 \end{aligned}$$

22.某地發行彩券 50 萬張，其中有 1 張獎金 300 萬元，2 張獎金各 50 萬元，50 張獎金各 1 萬元，試問每張彩券獎金的期望值為何？

【解答】9 元

【詳解】

所求期望值為

$$3000000 \cdot \frac{1}{500000} + 500000 \cdot \frac{2}{500000} + 10000 \cdot \frac{50}{500000} = 6 + 2 + 1 = 9 \text{ (元)}$$

23.老張過去買釋迦的經驗是平均 5 個中就有 1 個釋迦內長蟲不能吃須丟掉，因此有次到水果攤買釋迦時向老板抱怨，老板說今天釋迦每斤 70 元，如果老張要求當場打開，則售價提高至每斤 80 元，但如打開有蟲可退回，並送 1 斤無蟲的釋迦，試問老張應否要求打開？

【解答】應要求打開

【詳解】

對老張而言，若要求打開，如是好的則平均每斤貴 10 元，如是不好的則可得 1 斤(70 元)，所

以將釋迦打開的期望值 $(-10) \times \frac{4}{5} + 70 \times \frac{1}{5} = 6 > 0$ ，應要求打開

24. 擲一骰子，若出現點數為偶數，可得與點數相同的元數，若出現點數為奇數，須賠與點數相同的元數，求每擲一次的期望值。

【解答】 $\frac{1}{2}$

【詳解】

X	-1	2	-3	4	-5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\therefore \text{期望值} = \frac{1}{6}(-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$