高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.05.29					
範圍	3-2 機率	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 甲、乙、丙、丁、戊等五人排成一列，甲不排首，乙不排末之機率為＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{13}{20}$

【詳解】

排容原理：全$-$(甲排首)$-$(乙排末)$+$(甲排首且乙排末)$=5!-4!-4!+3!=120-48+6=78$

故所求機率為$\frac{78}{120}=\frac{13}{20}$

即錯排：$\frac{C_0^2 5!-C_1^2 4!+C_2^2 3!}{5!}=\frac{120-48+6}{120}=\frac{78}{120}=\frac{13}{20}$

2. 袋中有 5 紅球，3 白球；今任取 3 球，每球被取到的機會相等，則 3 球中至少 2 紅球之機率為＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{5}{7}$

【詳解】

3 球中，至少 2 紅球 $\Rightarrow$ 2 紅 1 白及 3 紅球，所求機率 $=\frac{C_2^5C_1^3+C_3^5}{C_3^8}=\frac{30+10}{56}=\frac{5}{7}$

3. 有六雙大小分別不同的鞋子（共 12 隻），假設每隻鞋被選出的機會均等，今從其中任意挑選出四隻，試求此四隻恰為匹配的兩雙的機率為＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{1}{33}$

【詳解】

全部挑法有C_4^{12}種，挑出恰為匹配的兩雙有$C_2^6\times C_2^2\times C_2^2$種，機率為$\frac{C_2^6\times C_2^2\times C_2^2}{C_4^{12}}=\frac{1}{33}$

4. 從 5 雙不同花色的襪子中，任取 4 隻，每隻被取到的機會相等，則此 4 隻，恰成一雙機率為＿。

【解答】$\frac{4}{7}$

【詳解】

4 隻恰成一雙$\Rightarrow$ 一雙及來自不同的二雙左或右之一，所求機率 $=\frac{C_1^5\cdot C_2^4\cdot 2^2}{C_4^{10}}=\frac{5\cdot 6\cdot 4}{210}=\frac{4}{7}$

5. 從 1、2、3、…、9 等九個數字中任取相異兩數，則所取得二數互質的機率為＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{3}{4}$

【詳解】

任取兩數的方法有$C_2^9=36$種，其中不互質的有(2，4)，(2，6)，(2，8)，(3，6)，(3，9)，(4，6)，(4，8)，(6，8)，(6，9)等 9 種情況

故由 1、2、3、…、9 等九個數字中任取相異兩數，其中互質的機率 $=1-\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$

6. 投擲一不均勻骰子一次，其出現點數與其發生的機率成正比，則出現質數點的機率為______。

【解答】$\dfrac{10}{21}$

【詳解】

令出現 1 點的機率為 k，則出現 2，3，4，5，6 點的機率分別為 $2k$，$3k$，$4k$，$5k$，$6k$

$\because\ P(S)=1 \Rightarrow k+2k+3k+4k+5k+6k=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{21}$

$\therefore$ 故出現質數點 2，3，5 的機率為 $\dfrac{2}{21}+\dfrac{3}{21}+\dfrac{5}{21}=\dfrac{10}{21}$

7. 袋中有 2 個 2 號球，3 個 3 號球，4 個 4 號球，今由袋中每次取出一球，取後不放回，每個球被取的機會相同，則

(1)前三次取的球都不同號碼的機率為__________，

(2)前三次取的球的號碼和為偶數的機率為__________。

【解答】$\dfrac{2}{7}$；$\dfrac{19}{42}$

【詳解】

(1) $\dfrac{C_1^2\times C_1^3\times C_1^4\times 3!}{9!}=\dfrac{2}{7}$

(2)三球號碼和為偶數可分二種情況：

三球均為偶數 $\Rightarrow$ $6\times5\times4$ 種

二球奇數，另一球偶數 $\Rightarrow$ $C_2^3\times C_1^6\times 3!$ 種

$\therefore$ 所求機率$=\dfrac{6\times5\times4+3\times6\times6}{9\times8\times7}=\dfrac{19}{42}$

8. 已知路旁有 10 棵樹，將它們任意編號為 1，2，3，⋯，9，10，且其中有三棵松樹，則編號為 4 與 5 都是松樹的機率為__________。

【解答】$\dfrac{1}{15}$

【詳解】

三棵松樹的編號中有兩棵編 4、5 的方法數為 $C_2^3\times 2!\times 8!$

10 棵樹任意編號有 10！方法

所以三棵松樹編號為 4 與 5 的機率 $\dfrac{3\times2!\times8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

9.擲一枚硬幣四次，恰出現三次正面的機率為__________，至少出現三次正面的機率為________。

【解答】$\dfrac{1}{4}$；$\dfrac{5}{16}$

【詳解】

SOL(一)

設擲四枚硬幣，樣本空間S，則$n(S)=2^4=16$

恰三次正面的事件為A，則 $n(A)=C_3^4=4$；至少三次正面的事件為B，則$n(B)=C_3^4+C_4^4=5$

所以$P(A)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{5}{16}$

SOL(二) $C_3^4(\dfrac{1}{2})^1(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{4}$；$C_3^4(\dfrac{1}{2})^1(\dfrac{1}{2})^3+C_4^4(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

10.若將四位數 1234 的數字任意重新排列，則

(1)恰有兩個數字位置不變的機率爲__________，

(2)每個數字都改變位置的機率爲__________。

【解答】$\frac{1}{4}$；$\frac{3}{8}$

【詳解】

(1) $\frac{C_2^4(C_0^2 2!-C_1^2 1!+C_2^2 0!)}{4!}=\frac{6(2-2+1)}{24}=\frac{1}{4}$

(2) $\frac{C_0^4 4!-C_1^4 3!+C_2^4 2!-C_3^4 1!+C_4^4 0!}{4!}=\frac{24-24+12-4+1}{24}=\frac{3}{8}$

11.擲一粒骰子三次，第三次出現 1 點的機率爲__________，第一次或第三次出現奇數點的機率爲__________。

【解答】$\frac{1}{6}$；$\frac{3}{4}$

【詳解】

(1)擲一粒骰子三次，第三次出現 1 的機率=$\frac{6\times 6\times 1}{6^3}=\frac{1}{6}$

(2)第一次或第三次出現奇數點的機率=$\frac{3\times 6\times 6+6\times 6\times 3-3\times 6\times 3}{6^3}=\frac{18+18-9}{6^2}=\frac{3}{4}$

12.袋中有 3 個紅球，2 個白球，1 個黑球，每球被取的機會相同，

(1)若一次取兩球，則兩球同色的機率爲__________。

(2)若一次取三球，則三球均不同色的機率爲__________。

【解答】(1) $\frac{4}{15}$　(2) $\frac{3}{10}$

【詳解】

(1) $\frac{C_2^3+C_2^2}{C_2^6}=\frac{4}{15}$

(2)一次取三球，三球均不同色的機率=$\frac{C_1^3 C_1^2 C_1^1}{C_3^6}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

13.六對夫婦參加一家庭舞會，若舞伴是以抽籤的方式來決定的，則至少有一對夫妻共舞的機率爲__________。

【解答】$\frac{91}{144}$

【詳解】

全 − 全錯排

$$P=1-\frac{C_0^6 6!-C_1^6 5!+C_2^6 4!-C_3^6 3!+C_4^6 2!-C_5^6 1!+C_6^6 0!}{6!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}=\frac{91}{144}$$

14.若將「*probability*」這個字的字母任意排列，則兩個b相鄰的機率爲__________，相同字母都不相鄰的機率爲__________。

【解答】(1)$\dfrac{2}{11}$　(2)$\dfrac{37}{55}$

【詳解】

(1)任意排列的排列數 $=\dfrac{11!}{2!\,2!}$ ，兩個 b 相鄰的排列數 $=\dfrac{10!}{2!}$

兩個 b 相鄰排列的機率 $=\dfrac{\frac{10!}{2!}}{\frac{11!}{2!\,2!}}=\dfrac{2}{11}$

(2)設 b 相鄰的排列 $\dfrac{10!}{2!}$ ，i 相鄰的排列 $\dfrac{10!}{2!}$ ，b 相鄰且 i 相鄰的排列 $9!$ ，

b 相鄰或'i 相鄰的排列 $2\times\dfrac{10!}{2!}-9!=10!-9!=9\times 9!$

相同字母不相鄰排列的機率 $=1-\left(\dfrac{9\times 9!}{\frac{11!}{2!\,2!}}\right)=1-\dfrac{18}{55}=\dfrac{37}{55}$

16.甲、乙兩人參加演講比賽，共有 10 個人參賽，若以抽籤方式決定上場的次序，則甲、乙兩人相鄰上場的機率為__________。

【解答】$\dfrac{1}{5}$

【詳解】$\dfrac{9\times 2!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{5}$

16. 5 男 5 女圍一圓桌而坐，則恰好男女相間之機率為__________。

【解答】$\dfrac{1}{126}$

【詳解】$P=\dfrac{4!\,5!}{9!}=\dfrac{1}{126}$

17.將 3 個球任意投入 3 個不同的袋中，每次投一個球，連續投 3 次，則

(1)每個袋子均有球的機率為__________。

(2)3 個球均投入同一袋中的機率為__________。

【解答】(1)$\dfrac{2}{9}$　(2)$\dfrac{1}{9}$

【詳解】

令樣本空間為 S ，則 $n(S)=3^3=27$

(1)每個袋子均有球即 (將 3 個不同球排在 3 個相異袋子前) 的排列數$=3!=6$

$\therefore\quad P=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$

(2)3 個球全放在同一袋中的排列數 $=3$　$\therefore$　機率 $=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

18.一袋中有黑球、白球、紅球共 12 個，已知黑球有四個且由袋中任取二球，取到二個均為紅球的機率為 $\dfrac{5}{33}$ ，求白球的個數。

【解答】3 個

【詳解】

設白球有 x 個，則紅球有 $8-x$ 個，則機率 $\dfrac{C_2^{8-x}}{C_2^{12}}=\dfrac{5}{33} \Rightarrow (8-x)(7-x)=20 \Rightarrow x=3$

19.同時投擲三粒公正的骰子，則出現點數和爲 5 的倍數的機率爲__________。

【解答】$\dfrac{43}{216}$

【詳解】

同時投擲三粒骰子點數和爲 5 的倍數者有

點數和 $=5$ 者有 (1，1，3)，(1，2，2)

點數和 $=10$ 者有 (1，3，6)，(1，4，5)， (2，2，6)，(2，3，5)，(2，4，4)，(3，3，4)

點數和 $=15$ 者有 (3，6，6)，(4，5，6)，(5，5，5)

故所求機率爲 $\dfrac{\dfrac{3!}{2!}\times 6+3!\times 4+\dfrac{3!}{3!}}{6^3}=\dfrac{43}{216}$

20.若甲、乙兩人各擲一枚公正的骰子一次，則甲的點數大於乙的點數的機率爲__________。

【解答】$\dfrac{5}{12}$

【詳解】

甲的點數 $=$ 乙的點數的機率爲 $\dfrac{6}{36}$

$\therefore$ 甲的點數大於乙的點數的機率爲 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{6}{36})=\dfrac{5}{12}$

21.自一副撲克（A poker hand）牌 52 張中任取 5 張，

(1)求 5 張牌成爲「富而好施」（Full house），即點數如(x，x，y，y，y)的形式，但x，y是不同點數的機率爲__________。

(2)求 5 張牌成爲「兩對」（Two pairs），即點數如(x，x，y，y，z)的形式，但x，y，z是不同點數的機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{6}{4165}$ (2) $\dfrac{198}{4165}$

【詳解】

(1) $P=\dfrac{C_2^{13}C_2^4C_3^4\times 2!}{C_5^{52}}=\dfrac{13\times 12\times 6\times 4}{\dfrac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}=\dfrac{6}{4165}$

(2) $P=\dfrac{C_3^{13}C_2^4C_2^4C_1^4\times\dfrac{3!}{2!}}{C_5^{52}}=\dfrac{13\times 6\times 11\times 6\times 6\times 4}{\dfrac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}=\dfrac{198}{4165}$

22.設甲、乙兩人以丟硬幣決定勝負，每丟一次硬幣賭資 1 元，約定出現正面是甲贏，出現反面是乙贏，試問丟完四次後，則

(1)甲贏 4 元的機率是多少？ (2)甲贏 1 元的機率是多少？ (3)甲贏 2 元的機率是多少？

(4)甲、乙無輸贏的機率是多少？

【解答】(1) $\dfrac{1}{16}$ (2) 0 (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) $\dfrac{3}{8}$

【詳解】

(1)甲贏 4 元表示四次都出現正面，其機率是$\frac{1}{16}$

(2)因每次結果是 $+1$ 或 -1，所以，4 個 ± 1 相加結果必爲 -4，-2，0，2，4

甲贏 1 元的機率爲 0

(3)甲贏 2 元表示四次中甲贏三次輸一次，也就是銅板出現 3 次正面，1 次反面

機率爲$C_3^4 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot \frac{1}{2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(4)甲、乙無輸贏表示四次中甲贏二次輸二次，也就是銅板出現 2 次正面，2 次反面

所以機率爲$C_2^4 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

23.一袋中有 6 個白球，4 個紅球，3 個黑球，每一球被取中的機會均等，試求下列各事件的機率：

(1)一次取出四球，恰爲二黑二白。　　(2)一次取出四球，恰爲三色。

(3)一次取出四球，恰爲二色。　　(4)一次取出一球，取後不放回，紅球先取完。

【解答】(1)$\frac{9}{143}$　(2)$\frac{72}{143}$　(3)$\frac{339}{715}$　(4)$\frac{153}{455}$

【詳解】

(1)取出四球的方法有C_4^{13}種，取中二黑二白的方法有$C_2^6 \times C_2^3$

$\therefore$ 所求機率 $=\frac{C_2^6 \times C_2^3}{C_4^{13}}=\frac{15\times 3}{715}=\frac{9}{143}$

(2)取出四球恰爲三色的方式有 2 白 1 紅 1 黑，2 紅 1 白 1 黑，2 黑 1 白 1 紅

$\therefore$ 所求機率$=\frac{C_2^6\times C_1^4\times C_1^3+C_2^4\times C_1^6\times C_1^3+C_2^3\times C_1^6\times C_1^4}{C_4^{13}}$

$=\frac{15\times 4\times 3+6\times 6\times 3+3\times 6\times 4}{715}=\frac{360}{715}=\frac{72}{143}$

(3)取出四球恰爲二色，正面討論情形較多，從反面處理較簡便

$\therefore$ 所求機率 $=1-$(恰爲 1 色的機率)$-$(恰爲三色的機率)

$=1-\frac{C_4^6+C_4^4}{C_4^{13}}-\frac{72}{143}=1-\frac{16}{715}-\frac{72}{143}=\frac{339}{715}$

(4) P(紅球先取完)$=1-P$(白比紅先取完 $\cup$ 黑比紅先取完)

$=1-P$(白比紅先取完)$-P$(黑比紅先取完)$+P$(白、黑均比紅先取完）

$=1-\frac{\text{紅}}{\text{紅}+\text{白}}-\frac{\text{紅}}{\text{紅}+\text{黑}}+\frac{\text{紅}}{\text{紅}+\text{非紅}}=1-\frac{4}{10}-\frac{4}{7}+\frac{4}{13}=\frac{153}{455}$