高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.06.04					
範圍	2-6 遞迴數列	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 數列$< a_n >$之遞迴表示式爲$a_1 = 3$，$a_n = a_{n-1} + 2$（$n \geq 1$），則此數列之$a_n =$__________。

【解答】$2n + 1$

【詳解】

Sol一：

$a_1 = 3$ 且$a_n = a_{n-1} + 2$ $\therefore$ $< a_n >$爲首項$a_1 = 3$，公差$d = 2$ 之等差數列

$\therefore$ $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 1$

Sol二：

$$
\begin{array}{rl}
 & a_2 = a_1 + 2 \\
 & a_3 = a_2 + 2 \\
 & a_4 = a_3 + 2 \\
 & \vdots \\
+) & a_n = a_{n-1} + 2 \\
\hline
 & a_{n-1} = a_1 + 2 \times n = 2n + 1
\end{array}
$$

2. 數列$< a_n >$之遞迴表示式爲$a_1 = 1$，$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 1$（$n \geq 1$），求此數列之一般項$a_n =$？

【解答】$2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$

【詳解】

Sol一：

$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 1 \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + 2 \Rightarrow 2(a_n - 2) = (a_{n-1} - 2) \Rightarrow \frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = \frac{1}{2}$

數列$< a_n - 2>$，且$\frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $a_1 - 2$，$a_2 - 2$，$a_3 - 2$，$a_4 - 2$，…..，$a_n - 2$ 成等比

且$< a_n - 2>$爲公比$r = \frac{1}{2}$，首項$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$， 故$a_n - 2 = (-1)(\frac{1}{2})^{n-1}$ $\Rightarrow a_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$

Sol二：

$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 1 \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + 2 \Rightarrow 2(a_n - 2) = (a_{n-1} - 2)$

即

$$
\begin{array}{rl}
 & 2(a_2 - 2) = (a_1 - 2) \\
 & 2(a_3 - 2) = (a_2 - 2) \\
 & 2(a_4 - 2) = (a_3 - 2) \\
 & \vdots \\
+) & 2(a_n - 2) = (a_{n-1} - 2) \\
\hline
 & 2^{n-1}(a_n - 2) = (a_2 - 1) \Rightarrow a_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}
\end{array}
$$

3. 數列 1，$(1+2)$，$(1+2+2^2)$，…，$(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$ 的首n項和爲__________。

【解答】$2^{n+1}-n-2$

【詳解】

此數列第 n 項爲 $a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

故所求數列首 n 項和爲 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}2^k-\sum\limits_{k=1}^{n}1=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

4. 橘子收成時，農人將它們堆成一堆，形成一正方形垛，每層都是一個正方形，設由上往下第 n 層有 a_n 個橘子（如下圖），今共堆了 20 層，試問共堆了__________個橘子。

【解答】2870

【詳解】

$1^2,2^2,3^2,\ldots\ldots\Rightarrow a_n=n^2$

$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=1^2+2^2+\cdots+20^2=\sum\limits_{k=1}^{20}k^2=\dfrac{20(20+1)(2\times20+1)}{6}=\dfrac{20\cdot21\cdot41}{6}=2870$

5. 設平面上的 n 條直線最多可把平面分割成 a_n 個區域，則下列何者正確？

(A) $a_3=6$　(B) $a_5=15$　(C) $a_n=a_{n-1}+n$　(D) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

【解答】(C)

【詳解】

一條直線把平面分割成 2 個區域　∴　$a_1=2$

當 n 條直線把平面分割成 a_n 個區域時，若再加一條直線，則這直線和原來 n 條直線各有一個交點，共得 n 個交點，這 n 個交點把新加的直線分成 $n+1$ 段，每一段表一個區域被這段分成兩個區域，所以新加這條直線，則增加 $n+1$ 個區域，故 $a_{n+1}=a_n+(n+1)$

即　$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

$\vdots$

$+)\quad a_n=a_{n-1}+n$

$a_n=a_1+2+3+4+\cdots+n=2+2+3+4+\cdots+n=2+\dfrac{(2+n)(n-1)}{2}=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

(A) $a_3=\dfrac{3^2+3+2}{2}=7\neq6$，……..×

(B) $a_5=\dfrac{5^2+5+2}{2}=16\neq15$，…..×

(C) $a_n=a_{n-1}+n$，………………○

(D) $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}\neq\dfrac{n(n+1)}{2}$，….×

6. 已知一數列 $<a_n>$ 定義爲 $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，則 $a_n=$__________。

【解答】$n^2 - n + 1$

【詳解】

因爲已知關係式$a_k = a_{k-1} + 2(k-1)$，$k \in N$，分別將k以 1，2，3，…，$(n-1)$代入上式，可得

$a_2 = a_1 + 2\times 1$，

$a_3 = a_2 + 2\times 2$，

$a_4 = a_3 + 3\times 3$，

…，

$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$，$n \ge 2$

將上各式相加，則得$a_n = a_1 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] = 1 + n(n-1)$，$n \ge 2$

$\therefore\ a_n = n^2 - n + 1$，$n \ge 1$

7. 平面上有n個圓經過同一定點，這n個圓最多把所在的平面分成a_n個部分，且$a_1 = 2$，$a_2 = 4$，則 $a_3 =$__________，又$a_n =$__________。

【解答】$a_3 = 7$；$a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

【詳解】

因爲$a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 7$，$a_4 = 11$，…，而且$a_2 - a_1 = 2$，$a_3 - a_2 = 3$，$a_4 - a_3 = 4$，…

故可推得$a_n - a_{n-1} = n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = a_{n-1} + n$

即
$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + 2\\
&a_3 = a_2 + 3\\
&a_4 = a_3 + 4\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n = a_{n-1} + n\\
\hline
&a_n = a_1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)
\end{aligned}$$

8. 數列$< a_n >$定義爲$a_1 = 1$，$n \in N$時，$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 1$，$a_{20}$之值爲__________。

【解答】400

【詳解】
$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + 2 \times 1 + 1\\
&a_3 = a_2 + 2 \times 2 + 1\\
&a_4 = a_3 + 2 \times 3 + 1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{20} = a_{19} + 2 \times 19 + 1\\
\hline
&a_{20} = a_1 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) + 1 \times 19 = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \times 19 \times 20 + 19 = 20 + 380 = 400
\end{aligned}$$

9. 一數列$\{a_n\}$定義如下：$a_1 = 2$，$a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1}}$，$n \in N$，求$a_5 =$__________。

【解答】$\dfrac{6}{5}$

【詳解】

$$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}=2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{a_{n-2}}}=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{a_1}}\end{array}}}\right\}n-1\qquad=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{\cfrac{2a_1-1}{a_1}}\end{array}}}\right\}n-1$$

$$=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{2-\cfrac{a_1}{2a_1-1}}\end{array}}}\right\}n-2\qquad=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{\cfrac{3a_1-2}{2a_1-1}}\end{array}}}\right\}n-2$$

$$=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{2-\cfrac{2a_1-1}{3a_1-2}}\end{array}}}\right\}n-3\qquad=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{\cfrac{4a_1-3}{3a_1-2}}\end{array}}}\right\}n-3$$

$$=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{2-\cfrac{3a_1-2}{4a_1-3}}\end{array}}}\right\}n-4\qquad=\ldots\ldots=\left.2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{array}{c}\vdots\\2-\cfrac{1}{\cfrac{(k+1)a_1-k}{ka_1-(k-1)}}\end{array}}}\right\}n-k\qquad=\ldots\ldots=\frac{na_1-(n-1)}{(n-1)a_1-(n-2)}.$$

$\therefore\quad a_5=\dfrac{5a_1-4}{4a_1-3}=\dfrac{5\cdot2-4}{4\cdot2-3}=\dfrac{6}{5}$

10.設數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=3$，$a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+7$（$n\in N$），則$a_n=$__________（用$n$表示）。

【解答】$28-25(\dfrac{3}{4})^{n-1}$

【詳解】

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{3}{4}a_{n-1}+7\ \cdots\cdots①\\[2mm] a_{n-1}=\dfrac{3}{4}a_{n-2}+7\cdots\cdots②\end{cases}$$

①－②得$a_n-a_{n-1}=\dfrac{3}{4}(a_{n-1}-a_{n-2})$

即　$(a_3-a_2)=\dfrac{3}{4}(a_2-a_1)$

$(a_4-a_3)=\dfrac{3}{4}(a_3-a_2)$

$(a_5-a_4)=\dfrac{3}{4}(a_4-a_3)$

$\vdots$

$$\begin{array}{l} +)\ (a_n - a_{n-1}) = \frac{3}{4}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ \hline (a_n - a_{n-1}) = (\frac{3}{4})^{n-2}(a_2 - a1) \end{array}$$

∴　數列< $a_n - a_{n-1}$ >是一個等比數列，公比 $\frac{3}{4}$

由①得$a_2 = \frac{3}{4}a_1 + 7 = \frac{3}{4} \times 3 + 7 = \frac{37}{4}$，故數列< $a_n - a_{n-1}$ >之首項$a_2 - a_1 = \frac{25}{4}$

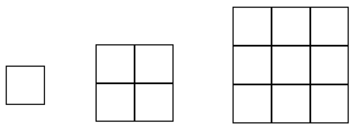
則$a_n = a_1 + [(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})]$

$$= 3 + \frac{\frac{25}{4}[1 - (\frac{3}{4})^{n-1}]}{1 - \frac{3}{4}} = 28 - 25(\frac{3}{4})^{n-1}$$

11.一個邊長爲n的大正方形中，共有n^2個單位正方形，如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了a_n根火柴棒，那麼$a_{n+1} - a_n =$__________。

【解答】$4n + 4$

【詳解】



a_1=4　a_2=12　a_3=24

如圖：

當$n = 1$時，$a_1 = 4$；

當$n = 2$時，$a_2 = 12 = 4 + 8 = a_1 + 4 \cdot 2$

當$n = 3$時，$a_3 = 24 = 12 + 12 = a_2 + 4 \cdot 3$；

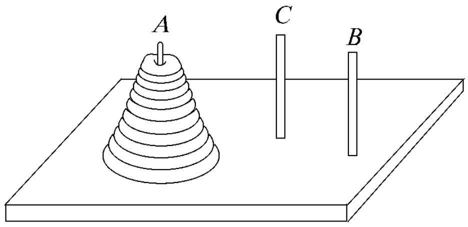
當$n = 4$時，$a_4 = 40 = 24 + 16 = a_3 + 4 \cdot 4$，

…

當$n = k + 1$時，$a_{k+1} = a_k + 4\ (k + 1)$

故可推得$a_{n+1} = a_n + 4\ (n + 1)$

12.如下圖，A柱中有n個大小不同的圓盤由大而小往上堆疊，若要從A柱全部搬移至B柱，每次只能搬動一圓盤，且每次大盤不可放在小盤之上，設共要搬動a_n次，若$a_{n+1} = pa_n + k$，求數對(p，k) =__________。a_{10} =__________。



【解答】(2，1)；1023

【詳解】

(1)設從A柱有$n + 1$個圓盤，搬動上方n個圓盤到B柱，需要搬動a_n次，再將A柱最底亦最大的圓盤搬到C柱上，再將B柱上n個圓盤搬到C柱最大的圓盤上，再次需要搬動a_n次，故有

$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$，則$(p，k) = (2，1)$

(2)

$a_1 = 1,$

$a_2 = 2a_1 + 1 = 3 \Leftarrow 2^2 - 1$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 7 \Leftarrow 2^3 - 1$

$a_4 = 2a_3 + 1 = 15 \Leftarrow 2^4 - 1$

....

$a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$

13.一數列$< a_n >$，已知$a_1 = 3$，$a_n = 2a_{n-1} + 1$，$n \in N$，則$a_n =$__________。

【解答】$2^{n+1} - 1$

【解 1】

$$\begin{array}{rl} \because & a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ -) & a_{n-1} = 2a_{n-2} + 1 \\ \hline & a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) \end{array}$$

由 $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$，且$a_2 - a_1 = (2a_1 + 1) - a_1 = 4$

$\therefore$ $< a_n - a_{n-1} >$為一G.P.，公比$r = 2$，首項 $a_2 - a_1 = 4$ $\therefore$ $a_n - a_{n-1} = 2^n$

(3)由$a_n - a_{n-1} = 2^n$

$$\begin{array}{rl} \therefore & a_2 - a_1 = 2^2 \\ & a_3 - a_2 = 2^3 \\ & \vdots \\ +) & a_n - a_{n-1} = 2^n \\ \hline & a_n - a_1 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\cdots + 2^n \end{array}$$

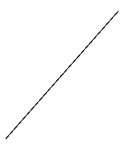
$\therefore$ $a_n = 3 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

14.在同一平面上，n條直線最多將平面分割成__________個區域。

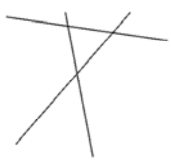
【解答】$\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$

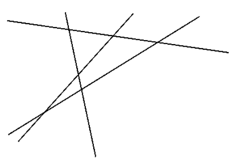
【詳解】

(1) $n = 1$ $\Rightarrow$ 2 個區域 (2) $n = 2$ $\Rightarrow$ 4 個區域



(3) $n = 3$ $\Rightarrow$ 7 個區域 (4) $n = 4$ $\Rightarrow$ 11 個區域





$\because$ $a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$，$a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$，$a_4 - a_3 = 4 \Rightarrow$ $< a_n >$成階差

$\therefore$ $< a_{n+1} - a_n >$ 成AP ，首項 2，公差 1

又$a_n = (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1$

$\Rightarrow \quad a_n = a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1}) = 2+\dfrac{n-1}{2}[2\times 2+(n-2)\times 1]$，

$\Rightarrow \quad a_n = 2+\dfrac{1}{2}(n-1)(n+2) = \dfrac{4+n^2+n-2}{2} = \dfrac{n^2+n+2}{2}$

15.設$a_1 = 1$，對任意正整數n，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 3$ 恆成立，我們可將它化成$a_{n+1} - k = \dfrac{1}{2}(a_n - k)$的等比形式，則$k =$__________，從而再求出$a_n =$__________。

【解答】6；$6-5(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

【詳解】

(1)$\because \quad a_{n+1} - k = \dfrac{1}{2}(a_n - k) \quad \therefore \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}k$

比較已知$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 3$，$\forall n \in N \quad \therefore \quad \dfrac{1}{2}k = 3 \quad \therefore \quad k = 6$

(2) $a_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{2}(a_n - 6) \Rightarrow (a_1-6),(a_2-6),(a_3-6),\ldots\ldots(a_n-6)$ 成等比，首項 $a_1 - 6 = -5$，公比$\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad a_n - 6 = (a_1 - 6)r^{n-1} = (-5)(\dfrac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow a_n = 6-5(\dfrac{1}{2})^{n-1}$

16.一數列$\{a_n\}$的遞迴定義式：$a_1 = 2$，$a_n = a_{n-1} + (\dfrac{1}{3})^{n-1}$，$n \in N$，試求這個數列的一般項$a_n =$_____。

【解答】$\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3})^{n-1}$

【證明】

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + \dfrac{1}{3}$

$a_3 = a_2 + (\dfrac{1}{3})^2$

$\vdots$

+) $a_n = a_{n-1} + (\dfrac{1}{3})^{n-1}$

$a_n = 2+[\dfrac{1}{3}+(\dfrac{1}{3})^2+\cdots+(\dfrac{1}{3})^{n-1}] = 2+\dfrac{\frac{1}{3}[1+(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3})^{n-1}$

17.數列$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{8}{13}$，…依此規則，其遞迴表示為

(1) $a_1 =$__________。 (2) a_{n+1}，a_n的關係為__________。

【解答】(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ (2) $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

【詳解】找規則

18.設數列$< a_n >$滿足下列條件$a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + n^3$，求此數列的一般項a_n，則

$a_n =$ ______________ 。

【解答】$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

【詳解】

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1\\
&a_2 = a_1 + 2^3\\
&a_3 = a_2 + 3^3\\
&\ \vdots\\
+)\ &a_n = a_{n-1} + n^3\\
\hline
&a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{aligned}$$

19.數列$< a_n >$中，$a_1 = 1$，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3$，$n\in N$，則$a_n =$ __________ 。

【解答】$-5(\frac{1}{2})^{n-1}+6$

【詳解】參閱NO15

$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3$，$a_1 = 1$ $\Rightarrow$ $a_n-6=\frac{1}{2}(a_{n-1}-6)$，$a_1 = 1$，$\therefore$ $a_n = (-5(\frac{1}{2})^{n-1}+6)$

20.一數列$< a_n >$，已知$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$5a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$，$n \in N$，則$a_5 =$__________ 。

【解答】$\frac{261}{125}$

【詳解】

$5a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \Rightarrow 5(a_{n+2} - a_{n+1}) = -3(a_{n+1} - a_n)$

$< a_{n+1} - a_n>$ 成G.P.，首項 $a_2 - a_1 = 2$ ，公比$r = -\frac{3}{5} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2(-\frac{3}{5})^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &a_5 - a_4 = b_1r^3 = 2(-\frac{3}{5})^3\\
&a_4 - a_3 = b_1r^2 = 2(-\frac{3}{5})^2\\
+)\quad &a_3 - a_2 = b_1r = 2(-\frac{3}{5})\\
\hline
&a_5 - 3 = 2[(-\frac{3}{5}) + (-\frac{3}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^3]
\end{aligned}$$

$\therefore$ $a_5 = \frac{261}{125}$

21.已知費布那希數列$< a_n >$，其遞迴關係$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 化爲$(a_n - k\, a_{n-1}) = r\,(a_{n-1} - k\, a_{n-2})$，則數對$(k，r)$之可能解爲________________________。(二解)

【解答】$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}，\frac{1-\sqrt{5}}{2})$或$(\frac{1-\sqrt{5}}{2}，\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

【詳解】

$(a_n-k\,a_{n-1})=r\,(a_{n-1}-k\,a_{n-2}) \quad\Rightarrow\quad a_n=(k+r)a_{n-1}-kra_{n-2}\Rightarrow \begin{cases}k+r=1\\ kr=-1\end{cases}$

令$r=1-k \quad\Rightarrow\quad k\,(1-k)=-1 \quad\Rightarrow\quad k^2-k-1=0 \quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \therefore\quad r=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}$

故$(k，r)=(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}，\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})$ 或 $(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}，\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$

22.某人上樓梯，每步可能上 1 階；也可能上 2 階。

(1)設a_n表此人上n階樓梯的方法數：試求$a_1=$________，$a_2=$________，$a_3=$________。

(2)$\langle a_n\rangle$的遞迴定義式：$\begin{cases}a_1=\_\_\_\_\_\_, a_2=\_\_\_\_\_\_\\ a_n=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, n\geq 1\end{cases}$

(3)如果樓梯有 10 階，那此人上樓梯方法?__________種。

【解答】(1)1；2；3 (2) $\begin{cases}a_1=1,\ a_2=2\\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, n\geq 3\end{cases}$ (3)89

【詳解】參閱習題 No5

23.已知一數列$\langle a_n\rangle$定義為$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$，$n=1，2，3，\cdots$。

(1)求$a_2=$________，$a_3=$________，$a_4=$________。

(2)觀察(1)的規則性，並推測第n項a_n=____________。（以n表示之）。

【解答】(1) $a_2=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{4}{7}$ (2) $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，$\forall n\in N$

【詳解】

(1)$a_1=1$，由所予遞迴定義可得$a_2=\dfrac{3a_1-1}{4a_1-1}=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3a_2-1}{4a_2-1}=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{3a_3-1}{4a_3-1}=\dfrac{4}{7}$

(2)由$a_1=\dfrac{1}{1}$，$a_2=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{3}{5}$，$a_4=\dfrac{4}{7}$，$\cdots$，觀察數列$\langle a_n\rangle$的規則性如下

a_n的分子成等差數列，首項為 1，公差為 1；分母也成等差數列，首項為 1，公差為 2

故可推測第n項$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，$\forall n\in N$

24.已知一數列的遞迴定義式為$\begin{cases}a_1=3\\ a_{n+1}-a_n=4n+3\end{cases}$（$n\in N$），求此數列的一般項$a_n=$__________。

【解答】 $2n^2+n$

【詳解】

$$\begin{array}{ll} & a_2-a_1=4\times 1+3\\ & a_3-a_2=4\times 2+3\\ & a_4-a_3=4\times 3+3\\ & \vdots\\ +) & a_n-a_{n-1}=4\times(n-1)+3\\ \hline & a_n-a_1=4[1+2+3+\ \cdots\ +(n-1)]+3(n-1)\end{array}$$

$\Rightarrow\quad a_n - 3 = 4\times\dfrac{n-1}{2}[1+(n-1)] + 3(n-1)$，得$a_n = 2n^2 + n$

25.設數列$< a_n >$，$a_1 = 2$，$a_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n-1}}$，$n\in N$，求

(1)數列的前四項$a_1 = 2$，$a_2 =$＿＿＿＿＿，$a_3 =$＿＿＿＿＿，$a_4 =$＿＿＿＿＿。

(2)推測一般項$a_n =$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $a_2 = \dfrac{3}{2}$，$a_3 = \dfrac{4}{3}$，$a_4 = \dfrac{5}{4}$，(2)$a_n = \dfrac{n+1}{n}$

【詳解】

(1) $a_1 = 2$，$a_2 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$，$a_3 = 2 - \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$，$a_4 = 2 - \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}\cdots$

(2)由上推測$a_n = \dfrac{n+1}{n}$