高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：97.05.12
範圍	2-5 二項式定里	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，下列何者正確？

(A)若$C_2^n = C_{18}^n$，則$n = 20$　　(B)若$C_r^{20} = C_{18}^{20}$，則$r = 2$

(C) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n = 0$　　(D) $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^n a_n = 3^n$

(E) $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = (\frac{3}{2})^n$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

(A)若$C_2^n = C_{18}^n \Rightarrow n = 2 + 18 = 20$

(B)若$C_r^{20} = C_{18}^{20} \Rightarrow r = 2$ 或 18

(C)令$x = -1 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n = 0$

(D)令$x = 2 \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^n a_n = 3^n$

(E)令$x = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = (\frac{3}{2})^n$

二、填充題(每題 10 分)

1. $(3x - \frac{2}{3}y)^5$展開式中，共有__________項，其中x^4y的係數爲__________。

【解答】6；-270

【詳解】

$(3x - \frac{2}{3}y)^5$的一般項$C_r^5(3x)^{5-r}(\frac{-2}{3}y)^r$中，共$H_5^2 = C_5^6 = C_1^6 = 6$ 項

其中x^4y項爲$C_1^5(3x)^4(\frac{-2}{3}y)^1 = 5 \times 3^4 \times \frac{-2}{3}(x^4y) = -270$，$x^4y$係數爲 -270

2. $(x + \frac{2}{x})^8$的展開式中，(1)常數項 $=$__________。　(2) x^4之係數爲__________。

【解答】(1)1120　(2)112

【詳解】

$(x + \frac{2}{x})^8$的一般項$C_k^8 x^{8-k}(\frac{2}{x})^k = C_k^8 2^k x^{8-2k}$

(1) $8 - 2k = 0 \Rightarrow k = 4 \quad \therefore \quad C_4^8 2^4 = 1120$

(2) $8 - 2k = 4 \Rightarrow k = 2 \quad \therefore \quad C_2^8 2^2 = 112$

3. 試求$\sum_{k=0}^{10}(1-x)^k$展開式中x^5項的係數__________。

【解答】-462

【詳解】$\sum_{k=0}^{10}(1-x)^k = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots + (1-x)^{10}$

$$= \frac{1 \cdot [1-(1-x)^{11}]}{1-(1-x)} = \frac{(x-1)^{11}+1}{x}$$

則原展開式中x^5項係數 即 $(x-1)^{11}$展開式中x^6之係數 $= C_6^{11}(-1)^5 = -462$

4. $a\in R$，設$(ax^2-\dfrac{1}{x})^5$展開式中，x^4項係數為 270，求$\dfrac{1}{x^2}$項係數為__________。

【解答】15

【詳解】

$(ax^2-\dfrac{1}{x})^5$的的一般項$C_r^5(ax^2)^{5-r}(-\dfrac{1}{x})^r=C_r^5(-1)^r a^{5-r}x^{2(5-r)-r}=C_r^5(-1)^r a^{5-r}x^{10-3r}$

$10-3r=4\Rightarrow r=2$，則$C_2^5(-1)^2a^3=10a^3$，$10a^3=270$ $\therefore$ $a=3$

$10-3r=-2\Rightarrow r=4$，則$\dfrac{1}{x^2}$項係數$C_4^5(-1)^4 3^1=15$，所求係數 $=15$

5. $(3x-\dfrac{1}{9\sqrt{x}})^{12}$的展開式中，試求：(1) x^2項的係數為________。(2) x^6項的係數為________。

【解答】(1) 0 (2) 495

【詳解】

$(3x-\dfrac{1}{9\sqrt{x}})^{12}=[3x-\dfrac{1}{9}(x)^{-\frac{1}{2}}]^{12}$ 的一般項$C_k^{12}(3x)^{12-k}(-\dfrac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}})^k=C_k^{12}(3)^{12-k}(-\dfrac{1}{9})^k x^{12-\frac{3}{2}k}$

(1)$12-\dfrac{3}{2}k=2$ $\Rightarrow$ $k=\dfrac{20}{3}$，但$k\in N$ $\therefore$ 沒有此項，即x^2項係數為 0

(2) $12-\dfrac{3}{2}k=6$ $\Rightarrow$ $k=4$，x^6項係數為$C_4^{12}\cdot 3^8(-\dfrac{1}{9})^4=495$

6. 試計算$(1.05)^{12}$的近似值至小數點後一位（第一位四捨五入）之值為__________。

【解答】1.8

【詳解】

$(1.05)^{12}=(1+0.05)^{12}=C_0^{12}\cdot 1+C_1^{12}(0.05)+C_2^{12}(0.05)^2+C_3^{12}(0.05)^3+\cdots$

$=1+0.6+0.165+0.0275+\cdots=1.7925\cdots\fallingdotseq 1.8$

7. $(1+x+x^2)^5$中，x^4，x^5之係數分別為a，b，則$a=$__________，$b=$__________。

【解答】45；51

【詳解】

$(1+x+x^2)^5$ 的一般項$\dfrac{5!}{p!\,q!\,r!}1^p x^q(x^2)^r=\dfrac{5!}{p!\,q!\,r!}x^{2r+q}$，其中 $p+q+r=5$

(1)$\begin{cases}p+q+r=5\\ q+2r=4\end{cases}$

p	1	2	3
q	4	2	0
r	0	1	2

$\therefore$ x^4之係數 $=a=\dfrac{5!}{4!\,1!}+\dfrac{5!}{2!\,2!}+\dfrac{5!}{3!\,2!}=5+30+10=45$

(2)$\begin{cases}p+q+r=5\\ q+2r=5\end{cases}$

p	0	1	2
q	5	3	1
r	0	1	2

$\therefore$ x^5之係數 $=\dfrac{5!}{5!}+\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{2!\,2!}=1+20+30=51$

8. $(x^2-2x+\dfrac{1}{x^2})^6$展開式中的常數項為__________。

【解答】260

【詳解】

一般項：$\dfrac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(-2x)^q(\dfrac{1}{x^2})^r=\dfrac{6!(-2)^q}{p!q!r!}x^{2p+q-2r}$，$p+q+r=6$，$p$，$q$，$r\in N\cup\{0\}$

當 $2p+q-2r=0$，又$p+q+r=6$，

p	0	3
q	4	0
r	2	3

則$(p，q，r)=(0，4，2)$，$(3，0，3)$

所求 $=\dfrac{6!(-2)^4}{4!2!}+\dfrac{6!}{3!3!}=240+20=260$

9. 級數$H_0^3+H_1^3+H_2^3+\cdots+H_{18}^3$之和為__________。

【解答】1330

【詳解】

$H_0^3+H_1^3+H_2^3+\cdots+H_{18}^3=H_{18}^4=C_{18}^{21}=\dfrac{21\times20\times19}{3\times2\times1}=1330$

10. $(x+y+z+u)^{10}$展開式中，

(1)所有不同類項共有__________項。 (2) $x^3y^3z^2u^2$項的係數為__________。

(3) $x^4y^3z^3$的同型項共有__________項。

【解答】(1) 286 (2) 25200 (3) 12

【詳解】

(1)展開式中一般項為$\dfrac{10!}{a!b!c!d!}x^ay^bz^cu^d$，其中$a+b+c+d=10$

a，b，c，d為非負整數，故有$H_{10}^4=C_{10}^{13}=286$ 項

(2) $x^3y^3z^2u^2$項之係數 $=\dfrac{10!}{3!3!2!2!}=25200$

(3) $x^4y^3z^3$的同型項共有$C_3^4\times\dfrac{3!}{2!}=12$ 項

11.$(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$的展開式中，$x^6$的係數為__________。

【解答】5985

【詳解】

原式 $=\dfrac{(1+x^2)[(1+x^2)^{20}-1]}{(1+x^2)-1}=\dfrac{(1+x^2)^{21}-(1+x^2)}{x^2}$

原式x^6的係數為$(1+x^2)^{21}$中x^8的係數$C_4^{21}=5985$

12.$[(a-2b)^2-3c]^5$展開式中，$a^3b^3c^2$項的係數為__________。

【解答】-14400

【詳解】

$[(a-2b)^2-3c]^5=\sum\limits_{k=0}^{5}C_k^5\,[(a-2b)^2]^{5-k}\cdot(-3c)^k$

故含有c^2的項為$C_2^5\,[a-2b]^6(-3c)^2=C_2^5\cdot9[\sum\limits_{n=0}^{6}C_n^6\cdot a^{6-n}\cdot(-2b)^n]c^2$

故$a^3b^3c^2$之項為 $9\cdot C_2^5\cdot C_3^6\cdot a^3\cdot(-2b)^3\cdot c^2=9\cdot C_2^5\cdot C_3^6\cdot(-2)^3\cdot a^3b^3c^2$

其係數 $=9\cdot C_2^5\cdot C_3^6\cdot(-2)^3=9\times10\times20\times(-8)=-14400$

13.設$(\sqrt{2}+1)^5=a+b\sqrt{2}$，$(\sqrt{2}-1)^5=c+d\sqrt{2}$，其中$a$，$b$，$c$，$d$為整數，則$a=$____，$d=$____。

【解答】41；29

【詳解】$(\sqrt{2}+1)^5=(\sqrt{2})^5+C_1^5(\sqrt{2})^4+C_2^5(\sqrt{2})^3+C_3^5(\sqrt{2})^2+C_4^5(\sqrt{2})+C_5^5=41+29\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-1)^5=(\sqrt{2})^5-C_1^5(\sqrt{2})^4+C_2^5(\sqrt{2})^3-C_3^5(\sqrt{2})^2+C_4^5(\sqrt{2})-C_5^5=29\sqrt{2}-41$

$a=41$，$d=29$

14.設a爲實數，$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，x^4的係數爲 80，則$a=$______，係數的最大值爲______。

【解答】2；80

【詳解】

設$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中的一般項爲$C_r^5(ax^2)^r\cdot(\frac{1}{x})^{5-r}=C_r^5a^rx^{2r}\cdot x^{r-5}$

即 $2r+r-5=4$，得$r=3$，所以係數$C_3^5a^3=80$，$a^3=8$，$a=2$

$(2x^2+\frac{1}{x})^5$展開式的各項係數分別爲 2^5，5×2^4，10×2^3，10×2^2，5×2，1，最大的係數爲 80

15.$(1-2x+3x^2)^3$展開式中，x^2的係數爲__________，x^4的係數爲__________。

【解答】21；63

【詳解】

$(1-2x+3x^2)^3$展開式中的一般項爲$\frac{3!}{p!\,q!\,r!}1^p(-2x)^q(3x^2)^r=\frac{3!}{p!\,q!\,r!}(-2)^q3^rx^{q+2r}$

其中 $p+q+r=3, 0\le p,q,r\le3$

(1)$\begin{cases}p+q+r=3\\ q+2r=2\end{cases}$，$\therefore$ $\begin{array}{c|c|c}p&1&2\\ q&2&0\\ r&0&1\end{array}$，$\therefore$ $\frac{3!}{1!2!0!}(-2)^2(3)^0+\frac{3!}{2!0!1!}(-2)^0(3)^1=21$

(2)$\begin{cases}p+q+r=3\\ q+2r=4\end{cases}$，$\therefore$ $\begin{array}{c|c|c}p&0&1\\ q&2&0\\ r&1&2\end{array}$，$\therefore$ $\frac{3!}{0!2!1!}(-2)^2(3)^1+\frac{3!}{1!0!2!}(-2)^0(3)^2=63$

即x^2的係數爲 21，x^4的係數爲 63

16.以$(x-1)^2$除$x^{11}-x+2$，其餘式爲__________。

【解答】$10x-8$

【詳解】

$x^{11}-x+2=[(x-1)+1]^{11}-x+2=C_0^{11}(x-1)^{11}+\cdots+C_{10}^{11}(x-1)+C_{11}^{11}-x+2$

$\therefore$ 所求餘式 $=C_{10}^{11}(x-1)+C_{11}^{11}-x+2=11(x-1)+1-x+2=10x-8$

17.在$(2-\frac{3}{x}+4x^2)^4$之展開式中，

(1)常數項爲__________。 (2) x^3項之係數爲__________。

【解答】(1) 880 (2) -1152

【詳解】

$(2-\frac{3}{x}+4x^2)^4$展開式中的一般項爲$\frac{4!}{p!\,q!\,r!}2^p(-\frac{3}{x})^q(4x^2)^r=\frac{4!}{p!\,q!\,r!}2^p(-3)^q4^rx^{-q+2r}$

其中 $p+q+r=4, 0\le p,q,r\le4$

(1) $\begin{cases} p+q+r=4 \\ -q+2r=0 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{array}{c|c|c} p & 4 & 1 \\ \hline q & 0 & 2 \\ \hline r & 0 & 1 \end{array}$ $\therefore$ $\dfrac{4!}{4!}2^4+\dfrac{4!}{1!\,2!\,1!}2\cdot(-3)^2\cdot 4=880$

(2) $\begin{cases} p+q+r=4 \\ -q+2r=3 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{array}{c|c} p & 1 \\ \hline q & 1 \\ \hline r & 2 \end{array}$ $\therefore$ $\dfrac{4!}{1!\,1!\,2!}2\cdot(-3)\cdot 4^2=-1152$

18.若$C_5^m=C_3^m$，則$C_0^m+C_1^m+C_2^m+\cdots+C_m^m=$__________。

【解答】256

【詳解】

若$C_5^m=C_3^m$，則$m=5+3=8$　$\because$　$(1+x)^8=C_0^8+C_1^8x+C_2^8x^2+\cdots+C_8^8x^8$

令$x=1$　$\Rightarrow$　$C_0^8+C_1^8+C_2^8+\cdots+C_8^8=2^8=256$

19.求$(2x-1)^4(x+3)^5$展開式中，x^7項之係數為__________。

【解答】984

【詳解】

$(2x-1)^4$的一般項$C_\alpha^4(-1)^{4-\alpha}(2x)^\alpha$；$(x+3)^5$的一般項$C_\beta^5 3^{5-\beta}x^\beta$

$(2x-1)^4(x+3)^5$展開式中的一般項$[C_\alpha^4C_\beta^5(-1)^{4-\alpha}2^\alpha 3^{5-\beta}]x^{\alpha+\beta}$

$\alpha+\beta=7$　$\Rightarrow$　$(\alpha，\beta)=(2，5)，(3，4)，(4，3)$

$\therefore$　$C_2^4C_5^5(-1)^2 2^2 3^0+C_3^4C_4^5(-1)2^3 3+C_4^4C_3^5(-1)^0 2^4 3^2=24-480+1440=984$

20.$(1+x)(2+x)(3+x)\cdot\cdots\cdot(10+x)$展開式中，$x^8$項的係數 $=$__________。

【解答】1320

【詳解】

x^8的係數為 10 個括號中有 8 個括號取x，另 2 個括號取常數，故其係數為

$(1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+\cdots+1\cdot 10)+(2\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2\cdot 10)+(3\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+3\cdot 10)$

$+\cdots+(8\cdot 9+8\cdot 10)+(9\cdot 10)$

$=[(1+2+3+\cdots+10)^2-(1^2+2^2+\cdots+10^2)]\times\dfrac{1}{2}=(55^2-\dfrac{10\times 11\times 21}{6})\dfrac{1}{2}=1320$

21.以$(x-1)^3$除$(x^2-2x+2)^{10}$的餘式為何？

【解答】$10x^2-20x+11$

【詳解】

$$\begin{aligned}(x^2-2x+2)^{10}&=[(x-1)^2+1]^{10}\\&=\sum_{k=0}^{10}C_k^{10}\cdot[(x-1)^2]^k=\sum_{k=0}^{10}C_k^{10}(x-1)^{2k}\\&=1+C_1^{10}(x-1)^2+C_2^{10}(x-1)^4+C_3^{10}(x-1)^6+\cdots+C_{10}^{10}(x-1)^{20}\\&=1+10(x-1)^2+(x-1)^3[C_2^{10}(x-1)+C_3^{10}(x-1)^3+\cdots+C_{10}^{10}(x-1)^{17}]\end{aligned}$$

$\therefore$　$(x-1)^3$除$(x^2-2x+2)^{10}$的餘式為 $1+10(x-1)^2=10x^2-20x+11$