高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.04.10					
範圍	2-1 集合	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 每題 10 分)

1. (複選)若 $S=\{a，b，\{a\}\}$，則下列何者為真？

(A) $\{a\}\subset S$ (B) $\{\{a\}\}\subset S$ (C) $\{\{b\}\}\subset S$ (D) $\{a，\{a\}\}\subset S$ (E) $\{a，\{a\}\}\in S$

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

$\because$ $a，b，\{a\}\in S$，$\{a\}$為元素也為子集

$\Rightarrow$ $\{a\}\subset S$，$\{b\}\subset S$，$\{\{a\}\}\subset S$，$\{a，\{a\}\}\subset S$，但$\{b\}\notin S$ $\Rightarrow$ $\{\{b\}\}\not\subset S$

2. (複選)若 $A，B，C$ 為三集合，$A\subset B\subset C$，則下列何者為真？

(A) $A-B=\phi$ (B) $(B-A)\cap A=\phi$ (C) $(C-A)\cap C=\phi$

(D) $(A\cap B)\cup C=C$ (E) $(A\cup B)\cap C=A$

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

$\because$ $A\subset B$ $\Rightarrow$ $A-B=A-(A\cap B)=A-A=\phi$

$(B-A)\cap A=(B\cap A')\cap A=B\cap A'\cap A=\phi$

$\because$ $A\subset B\subset C$ $\Rightarrow$ $(A\cap B)\cup C=A\cup C=C$

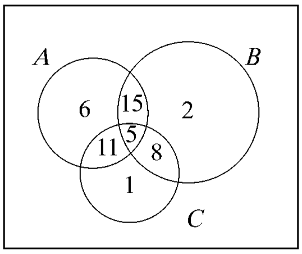
$(A\cup B)\cap C=B\cap C=B$，$(C-A)\cap C$ 不一定是ϕ

3. (複選)某班學生有 52 人參加數學測驗，試題 $A，B，C$ 三大題，答對 A 者有 37 人，答對 B 者有 30 人，答對 C 者有 25 人，答對 $A，B$ 者有 20 人，答對 $A，C$ 者有 16 人，答對 $B，C$ 者有 13 人，三題均答對者有 5 人，則

(A)三題均答錯者有 4 人 (B)恰對一題者有 10 人 (C)至少對一題者有 48 人

(D)至少對兩題者有 38 人 (E)恰對 A 一題者有 6 人

【解答】(A)(C)(E)



【詳解】

設答對 $A，B，C$ 題者所成集合分別為 $A，B，C$，則

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=37+30+25-20-13-16+5=48$（至少對一題）

$\Rightarrow$ $n(A'\cap B'\cap C')=n((A\cup B\cup C)')=52-48=4$（三題均答錯）

由圖知 $n(A\cap B'\cap C')+n(A'\cap B\cap C')+n(A'\cap B'\cap C)=6+2+1=9$（恰對一題）

至少對二題者 $=15+11+8+5=39$；恰對 A 一題者 $=6$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$P=\{x\in N \mid 1\le x\le 540$ 且x與 360 互質$\}$，$n(A)=$ __________。

【解答】144

【詳解】

（$[x]$表不大於x的最大整數）

$\because\ \ 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$，$1 \le x \le 540$ 且$(x，360) = 1$

1 到 540 的正整數中 2 或 3 或 5 的倍數(設A、B、C分別表 2、3、5 的倍數)共

$n(A \cup B \cup C)$

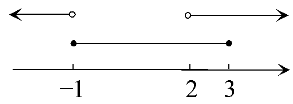
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$=[\frac{540}{2}] + [\frac{540}{3}] + [\frac{540}{5}] - [\frac{540}{6}] - [\frac{540}{10}] - [\frac{540}{15}] + [\frac{540}{30}]$

$=270 + 180 + 108 - 90 - 54 - 36 + 18=396$

故在 1 到 540 的正整數中去掉 2 或 3 或 5 的倍數$\Rightarrow\ \ n(P) = 540 - 396 = 144$

2. 若$A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$，$B = \{x \mid x^2 + ax + b \le 0\}$，$A \cup B = R$，$A \cap B = \{x \mid 2 < x \le 3\}$，則數對$(a，b) =$ ＿＿＿＿＿＿＿。



【解答】$(-2，-3)$

【詳解】

$x \in A \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2$ 或$x < -1$

$\because\ \ A \cup B = R$，$A \cap B = (2，3) \quad \Rightarrow \quad B = [-1，3]$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+1) \le 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \le 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2$，$b = -3$

3. 若$A = \{x \mid x = 3k+1，k \in Z，1 \le x \le 200\}$，$B = \{x \mid x = 5n+2，n \in Z，1 \le x \le 200\}$，則

(1) $n(A) =$＿＿＿＿＿＿＿。 (2) $n(A \cap B) =$＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)67 (2)13

【詳解】

$\because\ \ 1 \le x \le 200$，$x = 3k + 1$，$k = 0，1，2，\cdots，66$

$A = \{1,4,7,10,13,\ldots\ldots,199\} \Rightarrow \quad n(A) = 67$

$1 \le x \le 200$，$x = 5n + 2$，$n = 0，1，2，\cdots，39$

$B = \{2, 7,12,17,\ldots\ldots,197\} \Rightarrow \quad n(B) = 40$

當 $x \in A \cap B$ 時(即共同項)，$x = 15r + 7$；且 $1 \le x \le 200$，$r = 0，1，2，\cdots，12 \Rightarrow n(A \cap B) = 13$

4. 某班學生上次期中考成績：國、英、數不及格人數依序爲 7、16、17，國英、國數、英數兩科不及格人數依序爲 5、3、8，三科皆不及格有 2 位，三科皆及格有 15 位。

(1)至少有一科不及格的人數爲＿＿＿＿＿＿＿。 (2)全班共有＿＿＿＿＿＿＿位學生。

【解答】(1) 26 (2) 41

【詳解】

(1)設 A，B，C 三集合分別表示國、英、數不及格的人所成集合

設 U 表全班人所成集合

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$\qquad = 7 + 16 + 17 - 5 - 3 - 8 + 2 = 26$

(2)$n(U) = n(A \cup B \cup C) + n((A \cup B \cup C)') = n(A \cup B \cup C) + n(A' \cap B' \cap C')$

$\qquad = 26 + 15 = 41$

5. 設$A=\{x\mid x=y^2$，$y\in N$且 $10^2\le x\le 10^6\}$，$B=\{x\mid x=y^3$，$y\in N$且 $10^2\le x\le 10^6\}$，$C=\{x\mid x=y^4$，$y\in N$且 $10^2\le x\le 10^6\}$，則

(1) $n(A)=$__________。 (2) $n(A\cap B)=$__________。 (3) $n(A-C)=$__________。

【解答】(1)991 (2)8 (3)963

【詳解】

(1)$10^2\le x\le 10^6$，x爲完全平方數時⇒ $x=10^2$，11^2，12^2，⋯，1000^2，$n(A)=1000-10+1=991$

(2)$x\in A\cap B$，x爲完全 6 次方數時⇒ $x=3^6$，4^6，⋯，10^6 $\therefore$ $n(A\cap B)=10-3+1=8$

(3)$x\in C$，x爲完全 4 次方數時⇒ $x=4^4$，5^4，6^4，⋯，31^4 $\therefore$ $n(C)=31-4+1=28$

$\because$ $C\subset A$ $\Rightarrow$ $n(A-C)=n(A)-n(C)=991-28=963$

6. 小於 1000 的自然數中，

(1)不是 3 且不是 5 的倍數有__________個。

(2)是 3 或 5 或 7 的倍數者有__________個。

(3)是 3 或 5 但不爲 7 的倍數者有__________個。

【解答】(1) 533 (2) 542 (3) 400

【詳解】

(1) $999-([\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}])=999-333-199+66=533$

(2) $[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]+[\frac{999}{7}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=542$

(3) $[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=400$

7. 1 到 1000 中，3 或 5 的倍數有__________個，不是 6 也不是 4 的倍數有__________個。

【解答】(1) 467 (2) 667

【詳解】

(1)$[\frac{1000}{3}]+[\frac{1000}{5}]-[\frac{1000}{15}]=333+200-66=467$（個）

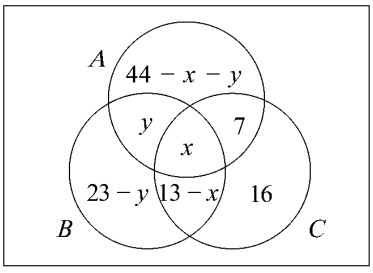
(2) $1000-[\frac{1000}{4}]-[\frac{1000}{6}]+[\frac{1000}{12}]=1000-250-166+83=667$（個）

8. 某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅A，B，C三題，測驗結果如下：答對A者有 51 人，答對B者有 36 人，只答對C者有 16 人，答對B，C兩題者有 13 人，答對A或C者有 75 人，答對B或C者有 59 人，而只答對A，B，C三題之一者有 66 人，則

(1)只答對A者有__________人。 (2)三題都答錯者有__________人。

【解答】(1) 33 (2) 8

【詳解】 如圖



答對 B 或 C 者有 59 人，$59-36-16=7\Rightarrow$只答對 B、C 者有 7 人

$$\begin{cases}51+16+(13-x)=75\\(44-x-y)+(23-y)+16=66\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$$

(1) $44-5-6=33$（人）

(2) $n(A\cup B\cup C)=92$ $\therefore$ $100-92=8$（人）

9. 301 至 600 之間的正整數

(1)有多少個 2 或 3 或 5 的倍數？__________，(2)有多少個 4 或 6 或 15 的倍數？__________。

【解答】220；110

【詳解】

$|A|$ 即 $n(A)$

(1)設 301 到 600 中的正整數，被 2，3，5 整除的數各成一個集合 A，B，C

則 $|A|=[\frac{600}{2}]-[\frac{300}{2}]=150$，$|B|=[\frac{600}{3}]-[\frac{300}{3}]=100$，$|C|=[\frac{600}{5}]-[\frac{300}{5}]=60$

$|A\cap C|=[\frac{600}{10}]-[\frac{300}{10}]=30$， $|A\cap B|=[\frac{600}{6}]-[\frac{300}{6}]=50$

$|B\cap C|=[\frac{600}{15}]-[\frac{300}{15}]=20$，$|A\cap B\cap C|=[\frac{600}{30}]-[\frac{300}{30}]=10$

由排容原理可得 $|A\cup B\cup C|=150+100+60-50-20-30+10=220$

(2)設 301 到 600 的正整數被 4，6，15 整除的數各形成一個集合 A，B，C，則

$|A|=[\frac{600}{4}]-[\frac{300}{4}]=75$，$|B|=[\frac{600}{6}]-[\frac{300}{6}]=50$，$|C|=[\frac{600}{15}]-[\frac{300}{15}]=20$

$|A\cap B|=[\frac{600}{12}]-[\frac{300}{12}]=25$，$|B\cap C|=[\frac{600}{30}]-[\frac{300}{30}]=10$

$|C\cap A|=[\frac{600}{60}]-[\frac{300}{60}]=5$，$|A\cap B\cap C|=[\frac{600}{60}]-[\frac{300}{60}]=5$

由排容原理可知 $|A\cup B\cup C|=75+50+20-25-10-5+5=110$

10.若 $S=\{(x，x+5)\mid x\in R\}$，$T=\{(y-1，x+1)\mid 3x+2y=10，x，y\in R\}$，則 $S\cap T=$__________。

【解答】$\{(-\frac{4}{5}，\frac{21}{5})\}$

【詳解】

設 $(a，b)\in S\cap T$

$\because$ $(a，b)\in S \Rightarrow a=x，b=x+5 \Rightarrow a-b+5=0$……①

$\because$ $(a，b)\in T \Rightarrow a=y-1，b=x+1 \Rightarrow y=a+1，x=b-1$

又 $3x+2y=10 \Rightarrow 3(b-1)+2(a+1)=10 \Rightarrow 2a+3b-11=0$……②

解①②得 $a=-\frac{4}{5}$，$b=\frac{21}{5}$

11.$A=\{x\mid \sqrt{x}\in N，1\le x\le 10^6\}$，$B=\{x\mid x=700k，k\in Z\}$，求 $n(A-B)=$__________。

【解答】986

【詳解】

$A=\{1^2，2^2，3^2，\cdots，(10^3)^2\}$，$n(A)=1000$

$A\cap B=\{x\mid x=7\times 2^2\times 5^2\times k，k=7\times 1^2，7\times 2^2，\cdots，7\times 14^2\}$，$n(A\cap B)=14$

$\therefore$ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=100-14=986$

12.若 $A=\{x，y，z\}$，$B=\{x+1，2，3\}$ 且 $A=B$，則 $(x，y，z)$ 之解共有__________組。

【解答】5

【詳解】

$\because\ \ A=B$ 且 $x\neq x+1\quad\Rightarrow\quad x=2$ 或 $x=3$

①若 $x=2$ 時，$A=\{2，y，z\}$，$B=\{3，2，3\}=\{2，3\}$

$\therefore\ \ \begin{cases} y=2\ ，\ 3\ ，\ 3 \\ z=3\ ，\ 2\ ，\ 3 \end{cases}$，有 3 組解

②若 $x=3$ 時，$A=\{3，y，z\}$，$B=\{4，2，3\}$

$\therefore\ \ \begin{cases} y=2\ ，\ 4 \\ z=4\ ，\ 2 \end{cases}$，有 2 組解

由①②知，共有 5 組解

13.設$A=\{x\mid x$爲二位正整數且x可表爲 $2(3n-1)$，$n\in N\}$，

$B=\{y\mid y$爲二位正整數且y可表爲 $4(2n-1)$，$n\in N\}$，則$n(A\cap B)=$______，$n(A\cup B)=$____。

【解答】3；23

【詳解】

$\because x\in A\Rightarrow x=2(3n-1)=6n-2=10,16,22,28,\ldots.,94$ ，$n=2,3,4,\cdots,16$，$n(A)=16-2+1=15$

$\because y\in B\Rightarrow y=4(2n-1)=8n-4=12,20,28,\ldots\ldots92$ ，$n=2,3,4,\cdots$ ，12，$n(B)=12-2+1=11$

若 $k\in A\cap B\quad\Rightarrow\quad k$ 表 A、B 共同項 $k=\ 28+24\ell$ ，$\ell\ =0$，1，2

$\Rightarrow\quad n(A\cap B)=3\quad\Rightarrow\quad n(A\cup B)=15+11-3=23$

14.設$A=\{x\in R\mid |x-1|\leq 2\}$，$B=\{x\in R\mid |x+1|\leq k\}$，若$A\subset B$，則$k$的最小值 $=$__________。

【解答】4

【詳解】

$x\in A\quad\Rightarrow\quad |x-1|\leq 2\quad\Rightarrow\quad -2\leq x-1\leq 2\quad\Rightarrow\quad -1\leq x\leq 3$

$x\in B\quad\Rightarrow\quad |x+1|\leq k\quad\Rightarrow\quad -k\leq x+1\leq k\quad\Rightarrow\quad -k-1\leq x\leq k-1$

$\because\ \ A\subset B\quad\Rightarrow\quad k-1\geq 3$ 且$-k-1\leq -1\quad\Rightarrow\quad k\geq 4$ 且 $k\geq 0\quad\Rightarrow\quad k\geq 4$

故 k 的最小值 $=4$

15.在一園遊會上，共有 60 人參與猜謎，謎題兩題，答對第一題的有 28 人，答對第二題的有 35 人，兩題都答錯的有 5 人，則兩題都答對的有幾人？_______，只答對第一題的有幾人？____

【解答】8；20

【詳解】

設 A 表答對第一題的人所成的集合，設 B 表答對第二題的人所成的集合，則

$\because\ \ n(A'\cap B')=5\quad\Rightarrow\quad n[(A\cup B)']=5\quad\therefore\quad n(U)-n(A\cup B)=5$

$\therefore\ \ 60-[28+35-n(A\cap B)]=5\quad\Rightarrow\quad n(A\cap B)=8$（人）

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=28-8=20$（人）