

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.04.17				
範圍	2-1、2 集合、加法、	班級		姓名
	乘法原理	座號		

一、選擇題 每題 10 分)

1. (複選)若 S 表一集合， $2^S = \{A \mid A \subset S\}$ ，則下列何者為真？
 (A) $\phi \in 2^S$ (B) $\phi \subset 2^S$ (C) $S \in 2^S$ (D) $S \subset 2^S$ (E) $\{\phi, S\} \subset 2^S$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】 $2^S = \{\phi, \dots, S\}$

$$\begin{aligned} \because \phi \subset S &\Rightarrow \phi \in 2^S, \text{ 又 } \phi \text{ 為任何集合之子集 } \Rightarrow \phi \subset 2^S \\ \because S \subset S &\Rightarrow S \in 2^S, \text{ 但 } S \not\subset 2^S \therefore \phi, S \in 2^S \Rightarrow \{\phi, S\} \subset 2^S \end{aligned}$$

2. (複選)設 $A \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq A \leq 500$ ，則下列何者正確？

- (A) 不為 5 的倍數之 A 值有 400 個 (B) 為 2 或 3 的倍數之 A 值有 333 個
 (C) 為完全平方數或完全立方數之 A 值有 27 個
 (D) 不為 2，不為 3 且不為 5 的倍數之 A 值有 134 個
 (E) 與 28 互質之 A 值有 214 個

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$$(A) 500 - \left[\frac{500}{5} \right] = 500 - 100 = 400$$

$$(B) \left[\frac{500}{2} \right] + \left[\frac{500}{3} \right] - \left[\frac{500}{6} \right] = 250 + 166 - 83 = 333$$

$$(C) S: \text{平方數}, S = \{1^2, 2^2, \dots, 22^2\}, n(S) = 22$$

$$C: \text{立方數}, C = \{1^3, 2^3, \dots, 7^3\}, n(C) = 7$$

$$S \cap C = \{1^6, 2^6\}, n(S \cap C) = 2$$

$$n(S \cup C) = n(S) + n(C) - n(S \cap C) = 22 + 7 - 2 = 27$$

$$\begin{aligned} (D) n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) &= n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_6) - n(A_{15}) - n(A_{10}) + n(A_{30}) \\ &= \left[\frac{500}{2} \right] + \left[\frac{500}{3} \right] + \left[\frac{500}{5} \right] - \left[\frac{500}{6} \right] - \left[\frac{500}{15} \right] - \left[\frac{500}{10} \right] + \left[\frac{500}{30} \right] \\ &= 250 + 166 + 100 - 83 - 33 - 50 + 16 = 366 \end{aligned}$$

$$\text{所求} = 500 - 366 = 134$$

$$(E) 28 = 2^2 \times 7$$

$$n(A_2 \cup A_7) = n(A_2) + n(A_7) - n(A_{14}) = \left[\frac{500}{2} \right] + \left[\frac{500}{7} \right] - \left[\frac{500}{14} \right] = 250 + 71 - 35 = 286$$

$$\text{所求} = 500 - 286 = 214$$

二、填充題(每題 10 分)

1. 小於 1000 的自然數中，

- (1) 不是 3 且不是 5 的倍數有_____個。
 (2) 是 3 或 5 或 7 的倍數者有_____個。
 (3) 是 3 或 5 但不為 7 的倍數者有_____個。

【解答】(1) 533 (2) 542 (3) 400

【詳解】

$$(1) 999 - \left(\left[\frac{999}{3} \right] + \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{999}{15} \right] \right) = 999 - 333 - 199 + 66 = 533$$

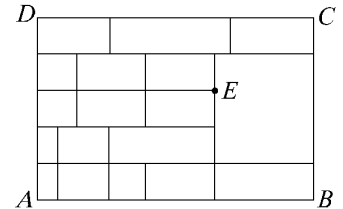
$$(2) \left[\frac{999}{3} \right] + \left[\frac{999}{5} \right] + \left[\frac{999}{7} \right] - \left[\frac{999}{15} \right] - \left[\frac{999}{35} \right] - \left[\frac{999}{21} \right] + \left[\frac{999}{105} \right] = 542$$

$$(3) \left[\frac{999}{3} \right] + \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{999}{15} \right] - \left[\frac{999}{35} \right] - \left[\frac{999}{21} \right] + \left[\frac{999}{105} \right] = 400$$

2. 某地街道圖如下，則

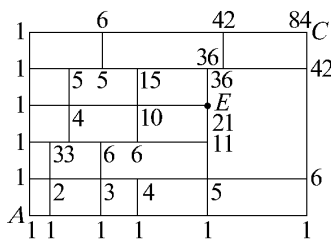
(1) 由A → E走捷徑有_____種走法，

(2) 由A → C走捷徑有_____種走法。



【解答】21 種；84 種

【詳解】

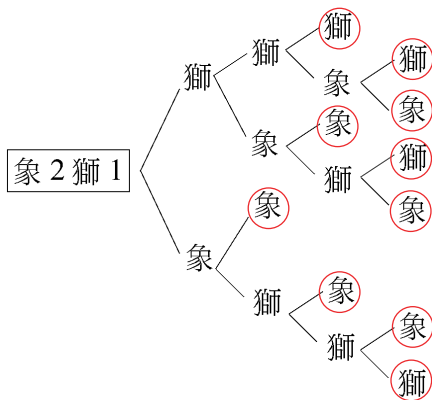


3. 職棒四年季後冠軍爭霸戰，是由季內賽前兩名，作七戰四勝的比賽，爭年度總冠軍，現已賽畢三場，兄弟象以 2：1 勝統一獅，則往後的比賽結果有_____種以決定冠軍。

【解答】10

【詳解】

利用樹形圖：4 5 6 7



從象 2 獅 1 開始，往後比賽的情形共有 10 種

4. 540 的正因數有_____個，其總和 =_____。

【解答】24；1680

【詳解】

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \quad \therefore \text{正因數有 } (2+1)(3+1)(1+1) = 24 \text{ 個}$$

$$\text{因數總和} = (1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5) = 7 \times 40 \times 6 = 1680$$

5. 7200 之正因數中為 5 的倍數但不為 9 的倍數者有_____個。

【解答】24

【詳解】

$7200 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $d | 7200$ 且 $5 | d$, 但 $9 \nmid d$, 即 5 的次方必須 1 次以上, 3 的次方不能 2 次以上, 則 d 為 $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(3^0 + 3^1)(5^1 + 5^2)$ 展開式的各項, 故 d 共有 $6 \times 2 \times 2 = 24$ 個

6. 1 至 800 的自然數中與 42 互質者有_____個。

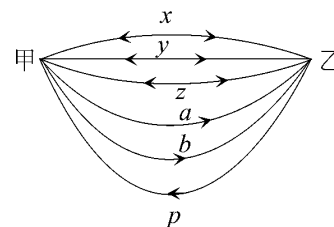
【解答】229

【詳解】 $42 = 2 \times 3 \times 7$

1 至 800 的自然數中與 42 互質, 即去掉 2 或 3 或 7 的倍數

$$\begin{aligned} \Rightarrow 800 - & \left(\left[\frac{800}{2} \right] + \left[\frac{800}{3} \right] + \left[\frac{800}{7} \right] - \left[\frac{800}{6} \right] - \left[\frac{800}{21} \right] - \left[\frac{800}{14} \right] + \left[\frac{800}{42} \right] \right) \\ & = 800 - (400 + 266 + 114 - 133 - 38 - 57 + 19) = 229 \end{aligned}$$

7. 甲地與乙地之間共有六條道路, 其中三條是雙向道, 兩條是甲地到乙地的單向道, 一條是乙地到甲地的單向道。今有一人從甲地騎車到乙地, 請問



(1) 有多少路徑供他選擇? _____;

(2) 他從甲地騎車到乙地, 再騎回甲地, 那麼他有多少方法? _____。

【解答】5; 20

【詳解】

(1) 甲到乙的路徑有 $3 + 2 = 5$ 條

(2) 甲到乙再回到甲的路徑, 先由甲到乙有 5 條, 再由乙到甲有 4 條, 共 $5 \times 4 = 20$ 條路徑

8. 將 10 個相同的球分給甲, 乙, 丙三人, 每人至少 2 個, 至多 4 個, 有_____種分法, 其中甲分得的球比乙多的方法有_____種。

【解答】6; 2

【詳解】

10 個相同的球, 分給甲, 乙, 丙各 x, y, z 個, 且 $2 \leq x, y, z \leq 4$

則 $x + y + z = 10$ 中 x, y, z 之解, 有下列情況

x	4	4	4	3	3	2
y	4	3	2	4	3	4
z	2	3	4	3	4	4

共有 6 種分法, 其中甲比乙多的分法有 2 種

9. 由 1, 2, 3, 4, 5, ... 到 123 共 123 個正整數, 這 123 個正整數中, 數字含 0 的有_____個, 又這 123 個正整數的數字中, 共含有_____個 0。

【解答】21; 22

【詳解】

1 到 123 的正整數中, 數字裡有 0 的有下列的情況

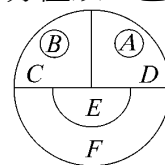
(1) 二位數有 10, 20, ..., 90 共 9 個

(2)三位數有 100, 101, ..., 109, 110, 120 共 12 個

所以共有 $9 + 12 = 21$ 個數的數字內有 0

這 21 個數, 0 共出現 $9 + 2 + 11 = 22$ 個

10.以紅、藍、黃、綠、橙、紫、黑七色塗下圖之A, B, C, D, E, F六部分, 每一部分僅以一色塗之, 顏色可重複使用, 相鄰部分必須不同色, 則有_____種塗法。

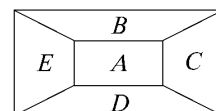


【解答】30240

【詳解】

$$\begin{array}{cccccc} A & D & E & F & C & B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & \cdot 6 & \cdot 5 & \cdot 4 & \cdot 6 & \cdot 6 = 30240 \end{array}$$

11.如圖, 以5種不同顏色塗在下圖區域中, 相鄰區域顏色須相異, 則有_____種塗法。



【解答】420

【詳解】

BD 同色時, $A \rightarrow \boxed{BD} \rightarrow C \rightarrow E : 5 \times \boxed{4 \times 1} \times 3 \times 3 = 180$ 種

BD 異色時, $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E : 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ 種

故共有 $180 + 240 = 420$ 種塗法

12.教室有四門, 甲、乙二人由不同門進入, 由不同門出來, 且各人不可由同一門進出, 則有_____種走法。

【解答】84

【詳解】

$\boxed{\text{進入}}$: $4 \times 3 = 12$

$\boxed{\text{出來}}$:

(1)甲由乙進之門出 : $1 \times 3 = 3$

(2)甲不由乙進之門出 : $2 \times 2 = 4$

\therefore 出來有 $3 + 4 = 7$ 種

$\boxed{\text{進出}}$ 共有 $12 \times 7 = 84$ 種

13.若 $A = \{(t, t-5) | t \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(t+1, 2t-1) | t \in \mathbb{R}\}$, 試求 $A \cap B =$ _____。

【解答】 $\{(-2, -7)\}$

【詳解】設 $(x, y) \in A \cap B$

(1) A 中, $(x, y) \in A \cap B$, 則 $x = t, y = t - 5 \Rightarrow x - y = 5 \dots\dots\dots ①$

(2) B 中, $(x, y) \in A \cap B$, 則 $x = t + 1, y = 2t - 1 \Rightarrow 2x - y = 3 \dots\dots\dots ②$

由①②解 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases}$

14.若 $A = \{x | x \in \mathbb{N}, \sqrt{x} \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10000\}$, $B = \{x | x = 12m, m \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10000\}$, 試求 : (1) $n(A \cap B) =$ _____。 (2) $n(A - B) =$ _____。

【解答】(1)16 (2)84

【詳解】

$$A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 100^2\} \Rightarrow n(A) = 100$$

$$B = \{12, 24, 36, \dots, 9996\} = \{12 \times 1, 12 \times 2, 12 \times 3, \dots, 12 \times 833\} \Rightarrow n(B) = 833$$

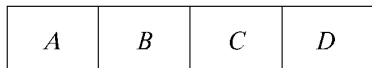
$$(1) A \cap B = \{x \mid x = 12m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot t^2, \text{ 其中 } 1 \leq t \leq 16\}$$

$$A \cap B = \{6^2 \times 1^2, 6^2 \times 2^2, 6^2 \times 3^2, \dots, 6^2 \times 16^2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 16$$

$$(2) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 16 = 84$$

15. 將下圖 A, B, C, D 四個區域，用 3 種顏色塗色，且相鄰區域不同色，則

(1) 有幾種塗法？_____ (2) 若三種顏色都用，塗法有幾種？_____種



【解答】24, 18

【詳解】

$$(1) 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24 \text{ (種)}$$

$$(2) AC \text{ 同色} \Rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D : 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 6 \text{ (種)}$$

$$AC \text{ 異色} \Rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D : 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12 \text{ (種)}$$

$$\text{共有 } 6 + 12 = 18 \text{ 種}$$