高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：97.04.07
範圍	1-5 圓錐曲線與直線	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 直線$y=x+k$與雙曲線$y^2-4x^2=12$，試就k之值討論下列各題：
   (1) ________________時，有二個交點；
   (2) ________________時，有一個交點；
   (3) ________________時，沒有交點。

【解答】(1) $k>3$ 或 $k<-3$　(2)$k=\pm 3$　(3) $-3<k<3$

【詳解】

$y=x+k$代入$y^2-4x^2=12$ $\Rightarrow$ $(x+k)^2-4x^2=12$ $\Rightarrow$ $-3x^2+2kx+k^2-12=0$

x的實根個數由判別式$D=4k^2+12(k^2-12)$決定之，$D=16(k^2-9)$

(1) $k>3$ 或$k<-3$ 時，$D>0$ $\Leftrightarrow$ 有兩個相異交點

(2)$k=\pm 3$ 時，$D=0$ $\Leftrightarrow$ 恰有一個交點（相切）

(3) $-3<k<3$ 時，$D<0$ $\Leftrightarrow$ 沒有交點

2. (1) 設Γ：$2x^2+3y^2+4y-1=0$ 上一點$A(1,-1)$，則切點爲A之切線方程式爲______________。
   (2) 過點$(-1,2)$與錐線 $2x^2+xy+y^2-4=0$ 相切的直線方程式爲___________________________。

【解答】(1) $2x-y-3=0$　(2)$2x-3y+8=0$

【詳解】

(1) $A(1,-1)$在橢圓：$2x^2+3y^2+4y-1=0$ 上

$\Rightarrow$ 切點爲A之切線方程式爲 $2\cdot 1\cdot x+3(-1)y+4\cdot\dfrac{y-1}{2}-1=0$ $\Rightarrow$ $2x-y-3=0$

(2) $2(-1)^2+(-1)\cdot 2+2^2-4=2-2+4-4=0$，知點$(-1,2)$在錐線 $2x^2+xy+y^2-4=0$ 上

切線方程式爲 $2(-1)x+\dfrac{2x+(-1)y}{2}+2y-4=0$，化簡得 $2x-3y+8=0$

3. 求過$(0,4)$且與$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切的直線方程式______________________。

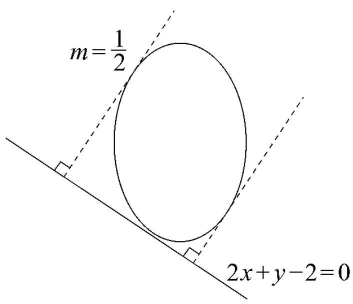
【解答】$y=\pm\sqrt{6}\,x+4$

【詳解】

設切線爲$y=mx\pm\sqrt{2m^2+4}$，過$(0,4)$ $\Rightarrow$ $4=\pm\sqrt{2m^2+4}$ $\Rightarrow$ $16=2m^2+4$

$\Rightarrow$ $m=\pm\sqrt{6}$ $\therefore$ $y=\pm\sqrt{6}\,x+4$ 爲所求

4. 橢圓$\dfrac{(x+2)^2}{8}+\dfrac{(y+3)^2}{18}=1$ 在直線 $2x+y-2=0$ 上的正射影長爲______。



【解答】8

【詳解】 與直線 $2x+y-2=0$ 垂直之直線斜率爲$\dfrac{1}{2}$，

斜率為$\frac{1}{2}$的切線為$y+3=\frac{1}{2}(x+2)\pm\sqrt{8\cdot\frac{1}{4}+18}$ $\Rightarrow$ $x-2y=4\pm4\sqrt{5}$

L_1：$x-2y=4+4\sqrt{5}$，L_2：$x-2y=4-4\sqrt{5}$，

則所求為$d(L_1，L_2)=\frac{|(4+4\sqrt{5})-(4-4\sqrt{5})|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=8$

5. 求與$x+2y=0$垂直，且與拋物線$y^2=16x$相切之直線方程式為＿＿＿＿＿。

【解答】$y=2x+2$

【詳解】

$\because$ 所求直線L與$x+2y=0$垂直，斜率為2，故此直線方程式為$y=2x+\frac{4}{2}$，即$y=2x+2$

6. 設拋物線Γ：$y^2=4x$，一光線從點(5，4)射出，平行Γ的軸射在Γ上的P點，經反射後又射到Γ上的Q點，則Q的坐標為＿＿＿＿＿。

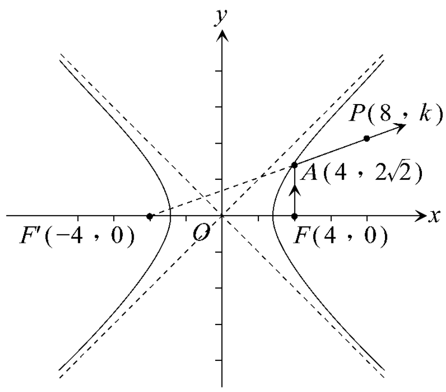
【解答】$(\frac{1}{4}，-1)$

【詳解】

Γ：$y^2=4x$，由(5，4)射出的光線，沿平行軸的直線$y=4$射到Γ上的點$P(4，4)$，經反射後反射光通過焦點$F(1，0)$，則$\overleftrightarrow{PF}$的方程式為$y=\frac{4}{3}(x-1)$與Γ的另一交點Q

解$y^2=4x$及$y=\frac{4}{3}(x-1)$，得$Q(\frac{1}{4}，-1)$

7. 雙曲線Γ：$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$，又$A\in\Gamma$，已知$A(4，2\sqrt{2})$，$F(4，0)$，若由$F$射至$A$之光線被雙曲線$\Gamma$反射，反射光通過$P(8，k)$，則$k=$＿＿＿＿＿。



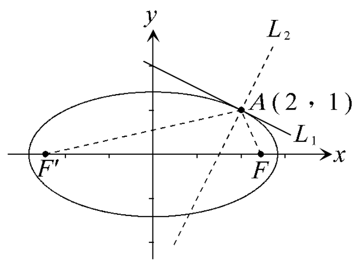
【解答】$3\sqrt{2}$

【詳解】

由光學性質可知反射光線必通過直線$\overleftrightarrow{F'A}$，$m_{F'A}=\frac{2\sqrt{2}-0}{4-(-4)}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\overleftrightarrow{F'A}$：$y-0=\frac{\sqrt{2}}{4}(x+4)$，$P(8，k)$代入$\overleftrightarrow{F'A}$ $\Rightarrow$ $k=3\sqrt{2}$

8. 設F與F'為橢圓$x^2+4y^2=8$的兩焦點，若A的坐標為(2，1)，求$\angle FAF'$的角平分線方程式＿＿



【解答】$2x-y=3$

【詳解】

過$A(2，1)$之切線L_1：$2x+4y=8$，

由光學性質可知$\angle FAF'$的角平分線為過A之法線L_2

$\because$ $L_2\perp L_1$ $\therefore$ 設L_2：$y-1=2(x-2)$ $\Rightarrow$ L_2：$2x-y=3$

9. 若直線 $y = x + k$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ 相切，求 k 之值＿＿＿＿＿＿＿＿，並求切點坐標＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$k = 3$ 時，切點爲$(-1，2)$；$k = -3$ 時，切點爲$(1，-2)$

【詳解】

$y = x + k$ 代入橢圓 $2x^2 + y^2 = 6$ 得 $2x^2 + (x + k)^2 = 6$，即 $3x^2 + 2kx + k^2 - 6 = 0$ 有等根

令判別式爲 0，得 $4k^2 - 12(k^2 - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 3$

(1) $k = 3$ 時，$3x^2 + 6x + 9 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

代入 $y = x + 3$ 得 $y = 2$，故切點$(-1，2)$

(2) $k = -3$ 時，$3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ 代入 $y = x - 3$，得 $y = -2$，故切點$(1，-2)$

10 雙曲線 $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 32 = 0$ 的二焦點 F，F'，其上一點 $P(2，4)$，求 $\angle FPF'$ 的平分線方程式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$6x - y - 8 = 0$

【詳解】

由雙曲線的光學性質知 $\angle FPF'$ 的平分線即雙曲線在點 $P(2，4)$ 的切線

即 $8x - 4y + 4(x + 2) + 2(y + 4) - 32 = 0$，化簡得 $6x - y - 8 = 0$

11.若點 $P(2，-3)$ 爲拋物線 $y^2 = 8x$ 之一弦 $\overline{AB}$ 的中點，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式爲＿＿＿＿＿＿，弦 $\overline{AB}$ 的長爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$4x + 3y + 1 = 0$，$\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

【詳解】

(1)設 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ $\because$ $P(2，-3)$ 爲 $\overline{AB}$ 中點 $\therefore$ $x_1 + x_2 = 4$，$y_1 + y_2 = -6$

又 $\begin{cases} y_1^2 = 8x_1 & \cdots\cdots① \\ y_2^2 = 8x_2 & \cdots\cdots② \end{cases}$，① − ②得 $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 8(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$ 斜率 $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{8}{y_1 + y_2} = \dfrac{8}{-6} = -\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$y + 3 = -\dfrac{4}{3}(x - 2)$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$4x + 3y + 1 = 0$

(2)由(1)，$x_1 - x_2 = -\dfrac{3}{4}(y_1 - y_2)$

$\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ y^2 = 8x \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y^2 + 6y + 2 = 0$，二根爲 y_1，y_2 $\therefore$ $y_1y_2 = 2$ 且 $y_1 + y_2 = -6$

$$\overline{AB}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{9}{16}(y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{25}{16}(y_1 - y_2)^2 = \frac{25}{16}[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]$$

$$= \frac{25}{16}[(-6)^2 - 4 \cdot 2] = \frac{25 \cdot 7}{4} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$

或 $$\overline{AB} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdot \frac{\sqrt{1 + m^2}}{|m|} = \frac{\sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{1 + (-\frac{4}{3})^2}}{|-\frac{4}{3}|} = \sqrt{28} \cdot \sqrt{\frac{25}{9} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$