高雄市明誠中學 高二數學平時測驗				日期：97.04.04	
範圍	1-5 圓錐曲線與直線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)下列何者為$y^2-4x-2y+1=0$的切線？

(A) $x=0$　(B) $x=1$　(C) $y=1$　(D) $4x-2y+3=0$　(E) $2x+3y+6=0$

【解答】(A)(D)

【詳解】

原式　$\Rightarrow$　$(y-1)^2=4x$

(A) $x=0$ 代入得$(y-1)^2=0$　$\Rightarrow$　$y=1$，有唯一解

(B) $x=1$ 代入得$(y-1)^2=4$　$\Rightarrow$　$y=-1$ 或 3，有 2 解

(C) $y=1$ 為拋物線的軸，雖交於一點　但$y=1$ 不是其切線

(D) $4x-2y+3=0$ 代入得$(x-\frac{1}{4})^2=0$　$\Rightarrow$　$x=\frac{1}{4}$，有唯一解

(E) $2x+3y+6=0$ 代入得$y^2+4y+13=0$，$D=4^2-4\cdot 13=-36<0$　$\therefore$　無解

2. (複選)已知雙曲線Γ：$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$，過下列哪些點作$\Gamma$ 之切線恰有一條？

(A)(0，0)　(B)(4，1)　(C)(3，$\frac{4}{\sqrt{5}}$)　(D)($\sqrt{5}$，-2)　(E)(1，2)

【解答】(C)(D)

【詳解】

(A)(0，0)為中心，過中心沒有切線

(B) $\frac{4^2}{5}-\frac{1}{4}>1$，點(4，1)與焦點在同一區域內，過(4，1)沒有切線

(C)(3，$\frac{4}{\sqrt{5}}$)在Γ 上，過此點恰有一條切線

(D)($\sqrt{5}$，-2)在漸近線 $2x+\sqrt{5}y=0$ 上，過此點恰有一條切線

(E) $\frac{1^2}{5}-\frac{2^2}{4}=\frac{1}{5}-1<1$，(1，2)與中心(0，0)在同一區域且不在漸近線上過點(1，2)有兩條切線

3.　(複選)直線$y=x+k$與雙曲線$y^2-4x^2=12$ 的相交關係為

(A) $k=0$ 時，沒有交點　(B) $k=3$ 時，有一個交點　(C) $k<-3$ 時，有二個交點

(D) $k>3$ 時，沒有交點　(E) $k=\sqrt{5}$時，沒有交點

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

$y=x+k$代入$y^2-4x^2=12$　$\Rightarrow$　$(x+k)^2-4x^2=12$　$\Rightarrow$　$-3x^2+2kx+k^2-12=0$

x的實根個數由判別式$D=4k^2+12(k^2-12)$決定之，$D=16(k^2-9)=16(k-3)(k+3)$

(1) $k>3$ 或$k<-3$ 時，$D>0$　$\Leftrightarrow$　有兩個相異交點

(2)$k=\pm 3$ 時，$D=0$　$\Leftrightarrow$　恰有一個交點（相切）

(3) $-3<k<3$ 時，$D<0$　$\Leftrightarrow$　沒有交點

二、填充題(每題 10 分)

1. 設Γ：$2x^2+3y^2+4y-1=0$ 上一點$A(1，-1)$，則切點為A之切線方程式為__________。

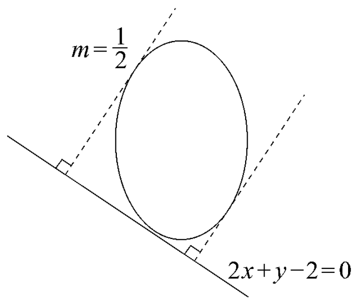
【解答】$2x-y-3=0$

【詳解】

$x=1$，$y=-1$ 代入方程式，得 $2+3-4-1=0\Rightarrow$ $A(1，-1)$在橢圓：$2x^2+3y^2+4y-1=0$ 上

$\Rightarrow$ 切點為A之切線方程式為 $2\cdot 1\cdot x+3(-1)y+4\cdot\dfrac{y-1}{2}-1=0\Rightarrow$ $2x-y-3=0$

2. 橢圓$\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ 在直線 $2x+y-2=0$ 上的正射影長為__。



【解答】$4\sqrt{2}$

【詳解】

與直線 $2x+y-2=0$ 垂直之直線斜率為$\dfrac{1}{2}$

而橢圓斜率為$\dfrac{1}{2}$的切線為$y+3=\dfrac{1}{2}(x+2)\pm\sqrt{4\cdot\dfrac{1}{4}+9}$

$\Rightarrow$ $x-2y=4\pm 2\sqrt{10}$ ，設L_1：$x-2y=4+2\sqrt{10}$ ，L_2：$x-2y=4-2\sqrt{10}$

則所求為$d(L_1，L_2)=\dfrac{|(4+2\sqrt{10})-(4-2\sqrt{10})|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=4\sqrt{2}$

3. 若雙曲線$y^2-x^2=a^2$與直線$x+2y=3$ 相切，則$a^2=$__________，切點坐標為__________。

【解答】3；$(-1，2)$

【詳解】

$y^2-x^2=a^2$與$x+2y=3$ 相切 $\Rightarrow$ $y^2-(3-2y)^2=a^2$ $\Rightarrow$ $3y^2-12y+a^2+9=0$ 有等根

令判別式為 0，得$(-12)^2-4\times 3(a^2+9)=0$ $\Rightarrow$ $a^2=3$，又 $3y^2-12y+12=0$

$\Rightarrow$ $y^2-4y+4=0$ $\Rightarrow$ $y=2$ 代入$x+2y=3$ 得$x=-1$，故切點為$(-1，2)$

4. 自原點O作拋物線$y=x^2+x+a$的切線有兩條，若此兩條切線互相垂直，則a的值為________。

【解答】$\dfrac{1}{2}$

【詳解】

過原點之直線$y=mx$代入拋物線$y=x^2+x+a$得$mx=x^2+x+a\Rightarrow x^2+(1-m)x+a=0$ 有等根

令判別式為 0，$(1-m)^2-4a=0$ $\Rightarrow$ $m^2-2m+1-4a=0$

已知切線有二條，即m有二解，設為m_1，m_2，則二根乘積$m_1m_2=-1$（二切線互相垂直），由根與係數關係知 $1-4a=-1$，故$a=\dfrac{1}{2}$

5. 若拋物線 $y=x^2+x+1$ 與 $y=2x^2-2x$ 交於二點 A ，B ，則直線 AB 的方程式為__________。

【解答】$4x-y+2=0$

【詳解】

過 $y=x^2+x+1$ 與 $y=2x^2-2x$ 交點 A ，B 之曲線可表為$\alpha(y-x^2-x-1)+(2x^2-2x-y)=0$

$\Rightarrow\ (2-\alpha)x^2-(\alpha+2)x+(\alpha-1)y-\alpha=0$ 表一直線時即直線 AB，此時 $2-\alpha=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=2$

故 $\overleftrightarrow{AB}$：$-4x+y-2=0$，即 $4x-y+2=0$

6. 設拋物線 Γ：$y^2=4x$，一光線從點(5，4)射出，平行 Γ 的軸射在 Γ 上的 P 點，經反射後又射到 Γ 上的 Q 點，則 Q 的坐標爲__________。

【解答】$(\frac{1}{4}，-1)$

【詳解】

Γ：$y^2=4x$，由(5，4)射出的光線，沿平行軸的直線 $y=4$ 射到 Γ 上的點 $P\,(4，4)$，經反射後必通過焦點 $F\,(1，0)$，則 $\overleftrightarrow{PF}$ 的方程式爲 $y=\frac{4}{3}(x-1)$ 與 Γ 的另一交點 Q，

解 $y^2=4x$ 及 $y=\frac{4}{3}(x-1)$，得 $Q(\frac{1}{4}，-1)$

7. 求與 $x+2y=0$ 垂直，且與拋物線 $y^2=16x$ 相切之直線方程式爲__________。

【解答】$y=2x+2$

【詳解】

$\because$ 所求直線 L 與 $x+2y=0$ 垂直，斜率爲 2，

又與拋物線 $y^2=\ 4\cdot 4\,x$ 相切，故此切線方程式爲 $y=2x+\frac{4}{2}$，即 $y=2x+2$

8. 過點 $(-1，2)$ 與錐線 $2x^2+xy+y^2-4=0$ 相切的直線方程式爲__________。

【解答】$2x-3y+8=0$

【詳解】

$2(-1)^2+(-1)\cdot 2+2^2-4=2-2+4-4=0$，知點 $(-1，2)$ 在錐線 $2x^2+xy+y^2-4=0$ 上

切線方程式爲 $2(-1)x+\dfrac{(-1)y+2x}{2}+2y-4=0$，化簡得 $2x-3y+8=0$

9. 雙曲線 Γ：$x^2-y^2=8$，$A(1，1)$，由 A 向 Γ 作切線，則切線方程式爲__________。

【解答】$9x+7y-16=0$

【詳解】

(Sol一：)

設切線 L：$y-1=m(x-1)$，$\begin{cases} L：y=mx+(1-m)\cdots\cdots① \\ \Gamma：x^2-y^2=8\qquad\cdots\cdots② \end{cases}$

①代入② $\quad\Rightarrow\quad(1-m^2)x^2+2m(m-1)x+(2m-m^2-1-8)=0$

$\because$ 相切，$\therefore\quad D=4m^2(m-1)^2-4(1-m^2)(2m-m^2-9)=0$

$\Rightarrow\quad 4(m-1)(7m+9)=0$

$\Rightarrow\quad m=\frac{-9}{7}$ 或 $m=1$（不合 $\because$ $m=1$ 時，線 L 爲其中一條漸近線）

$\therefore\quad L：y-1=\frac{-9}{7}(x-1)\quad\Rightarrow\quad 9x+7y-16=0$

(Sol二：)

雙曲線Γ：$x^2-y^2=8\Rightarrow\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{-8}=1$，設切線$L$：$y=mx\ \pm\sqrt{8m^2-8}$

過$A(1，1)\Rightarrow 1=m\pm\sqrt{8m^2-8}\Rightarrow 1-m=\pm\sqrt{8m^2-8}$

$(1-m)^2=8m^2-8\Rightarrow(m-1)(7m+9)=0\Rightarrow m=\dfrac{-9}{7}$或$m=1$（不合，$m=1$時，線$L$為其中一條漸近線），∴ L：$y-1=\dfrac{-9}{7}(x-1)\ \Rightarrow\ 9x+7y-16=0$

10.設拋物線Γ：$y=x^2-2x+2k$與直線ℓ：$y=2x+k$，$k\in R$，

(1)若對任意之實數x，Γ之圖形恆在直線ℓ之上方，則k之範圍為＿＿＿＿＿。

(2)若Γ與ℓ相切，則$k=$＿＿＿＿＿。

(3)若Γ與ℓ之交弦長為$2\sqrt{5}$，則$k=$＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $k>4$　(2) 4　(3) 3

【詳解】

(1) 對任意之實數x，Γ之圖形恆在直線ℓ之上方

即$\forall x$：$x^2-2x+2k>2x+k\ \Rightarrow\ x^2-4x+k>0$

$\therefore\ b^2-4ac<0\ \Rightarrow\ 4-k<0\ \Rightarrow\ k>4$

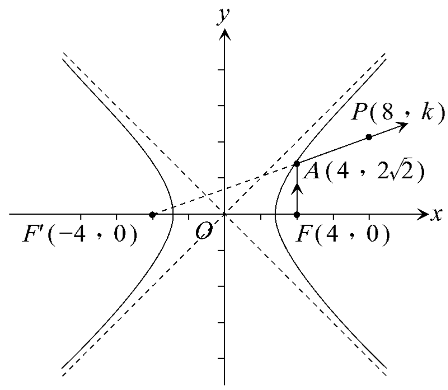
(2) 解聯立 $x^2-2x+2k=2x+k\ \Rightarrow\ x^2-4x+k=0$，相切$b^2-4ac=4(4-k)=0\ \Rightarrow\ k=4$

(3)交弦長 $=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\cdot\sqrt{1+m^2}=\sqrt{16-4k}\cdot\sqrt{1+4}=2\sqrt{5}\ \Rightarrow\ 16-4k=4\ \Rightarrow\ k=3$

11.雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$，又$A\in\Gamma$，已知$A(4，2\sqrt{2})$，$F(4，0)$，

若由F射至A之光線被雙曲線Γ反射，反射光通過$P(8，k)$，

則$k=$＿＿＿＿＿。



【解答】$3\sqrt{2}$

【詳解】

由光學性質可知反射光線必通過直線$\overleftrightarrow{F'A}$，

$m_{F'A}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{4-(-4)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\overleftrightarrow{F'A}$：$y-0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+4)$，

$P(8，k)$代入$\overleftrightarrow{F'A}\ \Rightarrow\ k=3\sqrt{2}$

12.設F與F'為橢圓$x^2+4y^2=8$的兩焦點，若A的坐標為$(2，1)$，求$\angle FAF'$的角平分線方程式＿＿

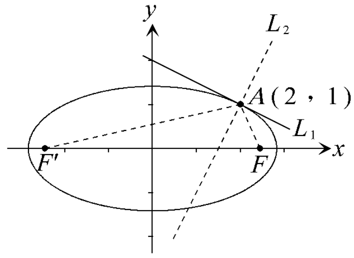
【解答】$2x-y=3$

【詳解】

過$A(2，1)$之切線L_1：$2x+4y=8$，$m=-\dfrac{1}{2}$

由光學性質可知$\angle FAF'$的角平分線為過A之法線L_2，且$L_2\perp L_1$

$\therefore L_2$：$y-1=2(x-2)\Rightarrow\ L_2$：$2x-y=3$



13.雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$，$P\in\Gamma$，

(1)過P之切線與二漸近線所圍成之三角形面積爲＿＿＿＿＿。

(2)設$A(0，2)$，則$\overline{AP}$之最小值 ＝＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 18　(2)$\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$

【詳解】

(1) Γ：$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$，$a=6$，$b=3$，過 P 之切線與二漸近線所圍成之三角形面積 $=ab=6\cdot 3=18$

(2) $P\in\Gamma$，設 $P(x,y)$ ，則$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow x^2-4y^2=36\Rightarrow x^2=36+4y^2$

$$\overline{AP}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{4y^2+36+(y-2)^2}=\sqrt{5y^2-4y+40}=\sqrt{5(y-\frac{2}{5})^2+\frac{196}{5}}\ge\sqrt{\frac{196}{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

14.若直線 $y=x+k$ 與橢圓$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$相切，求 k 之值，並求切點坐標＿＿＿＿＿＿。

【解答】$k=3$ 時，切點爲$(-1，2)$；$k=-3$ 時，切點爲$(1，-2)$

【詳解】

$y=x+k$代入橢圓 $2x^2+y^2=6$ 得 $2x^2+(x+k)^2=6$，即 $3x^2+2kx+k^2-6=0$ 有等根，

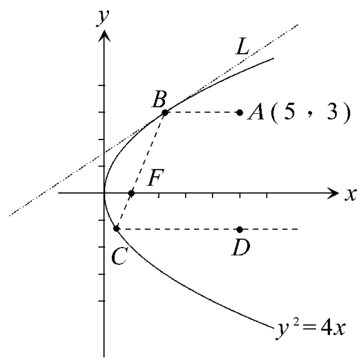
則判別式爲 0，得 $4k^2-12(k^2-6)=0\quad\Rightarrow\quad k=\pm 3$

(1) $k=3$ 時，$3x^2+6x+9-6=0\quad\Rightarrow\quad x^2+2x+1=0\quad\Rightarrow\quad x=-1$，得$y=2$，故切點$(-1，2)$

(2)$k=-3$ 時，$3x^2-6x+3=0\quad\Rightarrow\quad x=1$，得$y=-2$，故切點$(1，-2)$

15.已知一束光線自點$A(5，3)$沿著平行x軸之方向向左前進，碰到拋物線：$y^2=4x$上一點B後，反射碰上此拋物線上另一點C，而依直線CD之方向前進，試求：

(1)B坐標＿＿＿＿＿。　(2)直線CD之方程式＿＿＿＿＿＿＿。



【解答】(1)$B(\dfrac{9}{4}，3)$　(2)$y=-\dfrac{4}{3}$

【詳解】

$y^2=4x$的焦點$F(1，0)$，$\overleftrightarrow{AB}$：$y=3$ 平行x軸

$y=3$ 代入Γ：$y^2=4x\Rightarrow x=\dfrac{9}{4}$，$\therefore B(\dfrac{9}{4}，3)$，設$C(\dfrac{t^2}{4}，t)\in\Gamma$，$t<0$

由拋物線的光學性質知B，F，C三點共線得 $\dfrac{t-3}{\frac{t^2}{4}-\frac{9}{4}}=\dfrac{0-3}{1-\frac{9}{4}}\Rightarrow\quad t=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\quad C(\dfrac{4}{9}，-\dfrac{4}{3})$，又由光學性質知$\overleftrightarrow{CD}$平行$x$軸　，$\therefore\quad\overleftrightarrow{CD}$：$y=-\dfrac{4}{3}$

16.雙曲線 $4x^2-y^2+8x+4y-32=0$ 的二焦點F，F'，其上一點$P(2，4)$，求$\angle FPF'$ 的平分線方程式＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$6x-y-8=0$

【詳解】

由雙曲線的光學性質知$\angle FPF'$ 的平分線即雙曲線在點$P(2，4)$的切線

即 $8x-4y+4(x+2)+2(y+4)-32=0$，化簡得 $6x-y-8=0$

17.直線L：$2x+y=3$ 與橢圓 $4x^2+y^2=8$ 交於二點A，B，過A，B分別作橢圓的切線，此二切線交於一點P，求P的坐標__________________________。

【解答】$P(\frac{4}{3}，\frac{8}{3})$

【詳解】

利用切點弦（極線）公式(二次給一次，一次給一半)，

設$P(a，b)$，則直線AB爲P對橢圓 $4x^2+y^2=8$ 的切點弦 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式爲 $4ax+by=8$

$4ax+by=8$ 與 $2x+y=3$ 爲同一直線，即$\frac{4a}{2}=\frac{b}{1}=\frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{8}{3}$，即P的坐標爲$(\frac{4}{3}，\frac{8}{3})$

18.求過$(0，4)$且與$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切的直線方程式______________________。

【解答】$y=\pm\sqrt{6}\,x+4$

【詳解】

設切線爲$y=mx\pm\sqrt{2m^2+4}$，過$(0，4)$ $\Rightarrow$ $4=\pm\sqrt{2m^2+4}$ $\Rightarrow$ $16=2m^2+4\Rightarrow$ $m=\pm\sqrt{6}$

$\therefore$ $y=\pm\sqrt{6}\,x+4$ 爲所求

19.若點$P(2，-3)$爲拋物線$y^2=8x$之一弦$\overline{AB}$的中點，則直線$\overleftrightarrow{AB}$方程式爲__________，弦$\overline{AB}$的長爲__________。

【解答】$4x+3y+1=0$，$\frac{5\sqrt{7}}{2}$

【詳解】

(1)設$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ $\because$ $P(2，-3)$爲$\overline{AB}$中點 $\therefore$ $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=-6$

又$\begin{cases} {y_1}^2=8x_1 \cdots\cdots① \\ {y_2}^2=8x_2 \cdots\cdots② \end{cases}$，① − ②得$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=8(x_1-x_2)$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$ 斜率 $=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}\Rightarrow\overleftrightarrow{AB}$：$y+3=-\frac{4}{3}(x-2)\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$4x+3y+1=0$

(2)由(1)，$x_1-x_2=-\frac{3}{4}(y_1-y_2)$

$\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ y^2=8x \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y^2+6y+2=0$，二根爲y_1，y_2 $\therefore$ $y_1y_2=2$

$\overline{AB}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{9}{16}(y_1-y_2)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{25}{16}(y_1-y_2)^2$

$=\frac{25}{16}[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]=\frac{25}{16}[(-6)^2-4\cdot 2]=\frac{25\cdot 7}{4}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$