高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.03.13					
範圍	1-4 雙曲線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 已知雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上一點 P 到其中一焦點 F 的距離為 4，那麼 P 到另一焦點 F' 的距離是多少？(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10 (E) 12

【解答】(D)

【詳解】

雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3$，由雙曲線定義 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$

$\Rightarrow |4-\overline{PF'}|=2\times 3=6 \Rightarrow 4-\overline{PF'}=\pm 6$

$\Rightarrow \overline{PF'}=10$ 或 -2（不合） $\therefore \overline{PF'}=10$

2. (複選)雙曲線 Γ 之二焦點 $F'(-1，2)$，$F(5，2)$ 且過點 $(-3，6)$，下列何者正確？

(A)中心為(2，2) (B)貫軸長為 $2\sqrt{5}$ (C)共軛軸長為 4 (D)正焦弦長為 $\frac{8}{5}$

(E) Γ ：$\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

$F'(-1，2)$，$F(5，2) \Rightarrow$ 中心$(2，2)$，$c=3$

又 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=|\sqrt{2^2+4^2}-\sqrt{8^2+4^2}|=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow a=\sqrt{5} \quad \therefore b^2=4 \Rightarrow b=2 \quad \therefore \Gamma：\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

$\therefore$ 貫軸長 $=2a=2\sqrt{5}$，共軛軸長 $=2b=4$，正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 2^2}{\sqrt{5}}=\frac{8}{5}\sqrt{5}$

3. (複選)動點 $P(x，y)$ 滿足 $|\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}|=k$，下列何者正確？

(A) $k=0$ 表一直線 (B) $k=2$ 時，正焦弦長 $=\frac{21}{2}$ (C) $k=3$ 表一拋物線 (D) $k=5$ 表一射線

(E) $k>5$ 表一雙曲線

【解答】(A)(B)

【詳解】

$|\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}|=k \Rightarrow F'(-2，2)$，$F(1，-2)$ 且 $\overline{FF'}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(A) $k=0$ 時，$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} \Rightarrow 6x-8y+3=0$ 表一直線

(B) $k=2$ 時 $\because \overline{FF'}=2c=5 \Rightarrow c=\frac{5}{2} \quad \because 2a=2 \Rightarrow a=1$

$\therefore\ \ b=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$ $\therefore$ 正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot\frac{21}{4}}{1}=\frac{21}{2}$

(C)(D)(E) $0<k<5$ 表雙曲線，$k=5$ 表二射線，$k<5$ 沒有圖形

二、填充題(每題 0 分)

1. 等軸雙曲線Γ 有一條漸近線爲$x-y=0$，中心坐標爲(1，1)，且Γ通過點(3，0)，則Γ 的方程式爲__________，另一漸近線方程式爲__________。

【解答】$\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-1)^2}{3}=1$；$x+y=2$

【詳解】

等軸雙曲線Γ 的一漸近線爲$x-y=0$，中心(1，1)，則另一漸近線爲$x+y=d$，d爲常數，且$1+1=d$，即$d=2$，所以Γ 的方程式爲$(x-y)(x+y-2)=k$，k爲常數

點(3，0)在Γ 上，所以$(3-0)(3+0-2)=k$，即$k=3$，方程式爲$(x-y)(x+y-2)=3$

即$x^2-y^2-2x+2y-3=0$，亦即$(x-1)^2-(y-1)^2=3$，即$\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-1)^2}{3}=1$

2. 求雙曲線$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$之兩漸近線交點坐標爲__________。

【解答】(1，－3)

【詳解】雙曲線$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$之兩漸近線交點坐標爲雙曲線之中心，即(1，－3)

3. 求以 $2x+y+3=0$ 與 $2x-y-1=0$ 爲二漸近線，且過(0，0)之雙曲線方程式__________。

【解答】$(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$

【詳解】

設所求雙曲線方程式爲$(2x+y+3)(2x-y-1)=k$（$k\neq 0$）

將(0，0)代入，則 $k=3\times(-1)=-3$，雙曲線方程式爲$(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$

4. 錐線Γ ：$|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}|=4$，求

(1) Γ 的正焦弦長 $=$__________。(2) Γ 上任一點到兩條漸近線的距離乘積爲__________。

【解答】5，$\frac{20}{9}$

【詳解】

Γ ：$|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}|=4$ 中二定點$F'(2，-1)$，$F(2，5)$

$\overline{FF'}=6>4$ $\therefore$ Γ 表以F'，F爲焦點，貫軸長 4 之雙曲線，其貫軸$x=2$ 平行y軸

又 $2a=4$，$2c=6$ $\Rightarrow$ $a=2$，$c=3$ $\Rightarrow$ $b^2=c^2-a^2=5$

(1)正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=5$

(2) Γ 上任一點到兩漸近線的距離乘積 $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4\times5}{4+5}=\frac{20}{9}$

5. 錐線$\dfrac{x^2}{12-k}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$（$k$爲實數）爲一雙曲線時，$k$的範圍爲__________，其焦點坐標爲______。

【解答】$3<k<12$；$(3，0)$，$(-3，0)$

【詳解】

(1)$\dfrac{x^2}{12-k}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$ 爲一雙曲線$\Rightarrow(12-k)(3-k)<0$ $\Rightarrow(k-12)(k-3)<0$ $\Rightarrow 3<k<12$

(2)此時方程式爲$\dfrac{x^2}{12-k}-\dfrac{y^2}{k-3}=1$，$a^2=12-k$，$b^2=k-3$ $\Rightarrow$ $c^2=a^2+b^2=9$

$\Rightarrow$ $c=3$，又貫軸在x軸上，中心$(0，0)$，故焦點爲$(3，0)$，$(-3，0)$

6. 雙曲線Γ 之中心爲$(2，1)$，共軛軸平行y軸，過Γ 之一頂點之兩焦半徑爲 9 與 1，則
(1) Γ 之標準式爲__________。 (2) Γ 之焦點坐標爲__________。

【解答】(1)$\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$ (2) $(-3，1)$，$(7，1)$

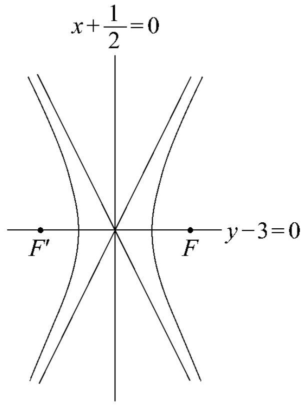
【詳解】

$\begin{cases}c+a=9\\c-a=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}c=5\\a=4\end{cases}$ $\Rightarrow b=3$，故雙曲線爲$\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$，二焦點$(-3，1)$，$(7，1)$

7. 雙曲線 $4x^2-y^2+4x+6y-9=0$ 的
(1)焦點坐標爲__________。 (2)正焦弦長爲__________。(3)漸近線方程式爲__________。

【解答】(1) $(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}，3)$，$(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}，3)$ (2) 4 (3) $2x+y-2=0$，$2x-y+4=0$

【詳解】



配方$\Rightarrow$ $4(x+\dfrac{1}{2})^2-(y-3)^2=1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{(y-3)^2}{1}=1$

$a^2=\dfrac{1}{4}$，$b^2=1$ $\Rightarrow$ $c^2=a^2+b^2=\dfrac{5}{4}$，$\therefore$ $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(1)焦點$(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}，3)$，$(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}，3)$

(2)正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 1}{\frac{1}{2}}=4$

(3)漸近線方程式 $2(x+\dfrac{1}{2})\pm(y-3)=0$，即 $2x+y-2=0$ 及 $2x-y+4=0$

8. 有一雙曲線 $|\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}|=8$，求此雙曲線的中心坐標________、兩條漸近線方程式________。

【解答】(1) $(0，3)$ (2) $y-3=\pm\dfrac{3}{4}x$

【詳解】

雙曲線 $|\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}|=8$……①

兩焦點$F(5，3)$，$F'(-5，3)$　∴　中心坐標$(\frac{5-5}{2}，\frac{3+3}{2})=(0，3)$

由①得$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\pm 8$

$\Rightarrow\quad (x+5)^2+(y-3)^2=(x-5)^2+(y-3)^2\pm 16\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}+64$

$\Rightarrow\quad \pm\ 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=5x-16\quad\Rightarrow\quad 9x^2-16(y-3)^2=144$

$\Rightarrow\quad \frac{x^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1\quad\Rightarrow$　漸近線$\frac{x^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=0$

$\Rightarrow\quad \frac{x}{4}\pm\frac{y-3}{3}=0\quad\Rightarrow\quad y-3=\pm\frac{3}{4}x$

9. 等軸雙曲線Γ 之中心爲$(2，1)$，正焦弦長 $2\sqrt{2}$，一漸近線方程式爲$x-y-1=0$，
(1) Γ 之標準式爲__________。　(2)若Γ 之貫軸平行x軸，則焦點坐標爲__________。

【解答】(1) $\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$　(2) $(0，1)，(4，1)$

【詳解】

另一漸近線爲$(y-1)=(-1)(x-2)$　$\Rightarrow$　$x+y-3=0$，設Γ：$(x-y-1)(x+y-3)=k$

$\Rightarrow\quad x^2-y^2-4x+2y+3=k\quad\Rightarrow\quad (x-2)^2-(y-1)^2=k$

$\Rightarrow\quad \frac{(x-2)^2}{k}-\frac{(y-1)^2}{k}=1$ 或 $-\frac{(x-2)^2}{-k}+\frac{(y-1)^2}{-k}=1$

$\therefore\quad a=\sqrt{k}$，$b=\sqrt{k}$ 或$a=\sqrt{-k}$，$b=\sqrt{-k}$，正焦弦長 $=\frac{2k}{\sqrt{k}}=2\sqrt{2}$ 或$\frac{-2k}{\sqrt{-k}}=-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad k=\pm 2$，故$\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$，貫軸平行$x$軸時，$\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=1$

$\Rightarrow\quad a^2=2，b^2=2\quad\therefore\quad c^2=2+2=4\quad\Rightarrow\quad c=2$，故焦點$F'(0，1)$，$F(4，1)$

10.雙曲線 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 之
(1)頂點坐標爲__________。　(2)漸近線方程式爲__________。
(3)雙曲線上任一點到二漸近線之距離之積 $=$__________。

【解答】(1) $(1，-4)，(1，0)$　(2) $2x-y-4=0，2x+y=0$　(3) $\frac{4}{5}$

【詳解】

$4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 配方$\Rightarrow 4(x-1)^2-(y+2)^2=-4\quad\Rightarrow\quad -\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$\therefore$　中心$(1，-2)$，$a=2$，$b=1\quad\Rightarrow\quad c^2=1+4=5$，頂點$(1，-4)$，$(1，0)$

漸近線 $y+2=(\pm\frac{2}{1})(x-1)\quad\Rightarrow\quad 2x-y-4=0$ 或 $2x+y=0$

任一點到二漸近線之距離之積 $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}$

11.以 $2x+y+1=0$ 與 $2x-y+3=0$ 爲兩漸近線，且經過原點的雙曲線方程式爲__________，它的正焦弦長 $=$__________。

【解答】$\dfrac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$；$4\sqrt{3}$

【詳解】

設以 $2x+y+1=0$ 與 $2x-y+3=0$ 爲兩漸近線的雙曲線，其方程式爲$(2x+y+1)(2x-y+3)=k$

此雙曲線過原點，$(2\times 0+0+1)(2\times 0-0+3)=k$，即$k=3$；方程式爲$(2x+y+1)(2x-y+3)=3$

即 $4x^2-y^2+8x+2y=0$，即$\dfrac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$，正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=4\sqrt{3}$

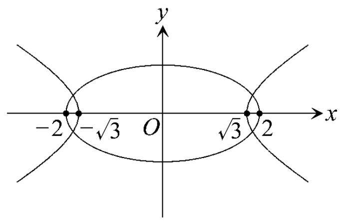
12.兩雙曲線$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 和$\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{36}=1$ 之交點個數爲__________。

【解答】0

【詳解】

兩雙曲線$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 和$\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{36}=1$ 爲共軛雙曲線　∴　無交點

13.以橢圓$x^2+4y^2=4$ 的焦點爲頂點，以其頂點爲焦點的雙曲線方程式爲__________。



【解答】$x^2-3y^2=3$

【詳解】

$x^2+4y^2=4\Rightarrow\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 頂點(2，0)，(− 2，0)，焦點($\sqrt{3}$ ，0)，($-\sqrt{3}$ ，0)，中心(0，0)

雙曲線之頂點($\sqrt{3}$ ，0)，($-\sqrt{3}$ ，0)，焦點(2，0)，(− 2，0) ，中心(0，0)

則$a=\sqrt{3}$ ，$c=2$，而$b^2=c^2-a^2=1$，故所求爲$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{1}=1$

14.雙曲線$\dfrac{x^2}{4-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 之貫軸長爲共軛軸長的二倍，則k之值爲__________。

【解答】5

【詳解】

$\dfrac{x^2}{4-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$爲雙曲線，　∵　$9-k>4-k$　∴　$9-k>0$，$4-k<0$

$\Rightarrow\quad\dfrac{y^2}{9-k}-\dfrac{x^2}{k-4}=1\quad\Rightarrow\quad a^2=9-k$，$b^2=k-4$，且$a=2b\Rightarrow\sqrt{9-k}=2\sqrt{k-4}\quad\Rightarrow\quad k=5$

15.雙曲線 $4x^2-y^2+8y+4=0$ 上一點$P(2，10)$，

(1)過P作二漸近線之平行線，此二直線與漸近線所圍成平行四邊形的面積爲__________。

(2)此雙曲線的共軛雙曲線方程式爲__________。

【解答】(1) 5　(2) 10　(3) $\dfrac{(y-4)^2}{20}-\dfrac{x^2}{5}=-1$

【詳解】

$4x^2-y^2+8y+4=0$ 配方⇒ $4x^2-(y-4)^2=-20$ ⇒ $\dfrac{(y-4)^2}{20}-\dfrac{x^2}{5}=1$，$a^2=20$，$b^2=5$

(1)平行四邊形面積 $=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=5$

(2)共軛雙曲線方程式爲$\dfrac{(y-4)^2}{20}-\dfrac{x^2}{5}=-1$

16.通過拋物線$y=x^2$與橢圓$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的交點且過點(3，1)之二次曲線方程式爲__________。

【解答】$32y^2-x^2+9y=32$

【詳解】

過$y=x^2$與$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$交點之錐線方程式設爲$k(x^2-y)+(x^2+4y^2-4)=0$

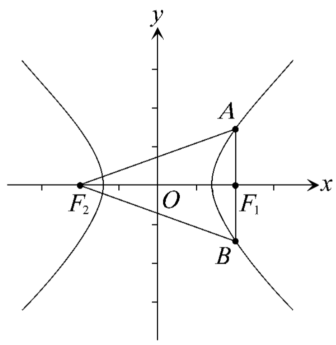
過點(3，1)得 $8k+(9+4-4)=0$ ⇒ $k=-\dfrac{9}{8}$

故 $-\dfrac{9}{8}(x^2-y)+(x^2+4y^2-4)=0$，化簡得 $32y^2-x^2+9y-32=0$

17.雙曲線Γ∶$x^2-y^2=8$，兩焦點F_1，F_2，弦$\overline{AB}$通過F_1，且$\overline{AB}$長爲 10，則△ABF_2的周長爲________。

【解答】$20+8\sqrt{2}$

【詳解】



$x^2-y^2=8$ ⇒ $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$ ∴ $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

由定義可知$\begin{cases}\overline{AF_2}-\overline{AF_1}=2a=4\sqrt{2} & \cdots\cdots ① \\ \overline{BF_2}-\overline{BF_1}=2a=4\sqrt{2} & \cdots\cdots ②\end{cases}$

①+② ⇒ $(\overline{AF_2}+\overline{BF_2})-(\overline{AF_1}+\overline{BF_1})=8\sqrt{2}$

$\overline{AF_2}+\overline{BF_2}=8\sqrt{2}+(\overline{AF_1}+\overline{BF_1})=8\sqrt{2}+10$

△ABF_2之周長 $=(\overline{AF_2}+\overline{BF_2})+\overline{AB}=(8\sqrt{2}+10)+10=20+8\sqrt{2}$

18.設P點爲雙曲線$\dfrac{y^2}{4}-x^2=1$ 上在第一象限內的一點，P與點$A(3，0)$的最小距離爲__________，又P點的坐標爲__________。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{70}}{5}$，$(\dfrac{3}{5}，\dfrac{2\sqrt{34}}{5})$

【詳解】

設 $P(\tan\theta，2\sec\theta)$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{AP}=\sqrt{(\tan\theta-3)^2+(2\sec\theta)^2}=\sqrt{\tan^2\theta-6\tan\theta+9+4\sec^2\theta}=\sqrt{\tan^2\theta-6\tan\theta+9+4(1+\tan^2\theta)}$

$=\sqrt{5(\tan^2\theta-\dfrac{6}{5}\tan\theta)+13}=\sqrt{5(\tan\theta-\dfrac{3}{5})^2+\dfrac{56}{5}}$，$\overline{AP}$ 最小值 $=\sqrt{\dfrac{56}{5}}=\dfrac{2\sqrt{70}}{5}$

此時 $\tan\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\dfrac{34}{5}}$，∴ $P(\dfrac{3}{5}，\dfrac{2\sqrt{34}}{5})$