高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.03. 06					
範圍	1-3 橢圓	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 平面上有一個橢圓，已知其長軸平行於 x 軸，短軸的一端點為 $(-4，0)$，其中一焦點為$(0，4)$，則此橢圓長軸的長度為何？(*A*) 2 (*B*) $2\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $6\sqrt{2}$ (E) $8\sqrt{2}$

【解答】(E)

【詳解】短軸的一端點為$(-4，0)$ $\Rightarrow$ 短軸：$y=0$，焦點$(0，4)$在長軸上 $\Rightarrow$長軸：$x=0$

$\therefore$ 中心$(0，0)$ $\Rightarrow$ $b=4$，$c=4$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore$ 長軸長 $=2a=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

2. 橢圓 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$，下列何者正確？

(A)中心$(-1，2)$ (B)長軸長 $=3$ (C)短軸長 $=2$ (D)正焦弦長 $=\frac{8}{3}$ (E)長軸方程式$x-1=0$

【解答】(D)

【詳解】$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ $\Rightarrow$ $4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$ $\Rightarrow$ $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$\therefore$ $a=3$，$b=2$，故此橢圓的中心$(1，-2)$，長軸長 $2a=6$，短軸長 $2b=4$

正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot2^2}{3}=\frac{8}{3}$，長軸方程式為$y+2=0$

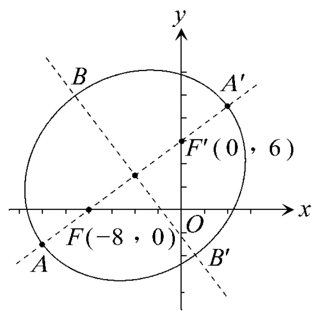
3. (複選)有關方程式$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$ 之圖形，下列敘述何者為真？

(A)圖形是中心在$(-4，3)$之橢圓 (B)短軸所在之直線斜率為$\frac{3}{4}$ (C)圖形不與坐標軸成對稱

(D)短軸之長為$5\sqrt{3}$ (E)原點在圖形的內部

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】



$\overline{FF'}=\sqrt{64+36}=10$，$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20>10$ 圖形為橢圓

焦點為 $F(-8，0)$，$F'(0，6)$，長軸長 $2a=20$ $\Rightarrow$ $a=10$，

中心為$\overline{FF'}$之中點$(-4，3)$，$2c=\overline{FF'}=10$ $\Rightarrow c=5$，

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{100-25}=5\sqrt{3}\Rightarrow$ 短軸長 $2b=10\sqrt{3}$，

長軸在直線 FF'：$3x-4y+24=0$ 上$m_{FF'}=\frac{3}{4}$，短軸所在直線斜率為

$-\frac{4}{3}$，

原點$(0，0)$代入方程式$\sqrt{(0+8)^2+0^2}+\sqrt{0^2+(0-6)^2}=14<20$ ，原點在圖形的內部

二、填充題(每題 10 分)

1. 若一橢圓的兩焦點在$(1，3)$，$(1，-5)$，正焦弦之長為$\frac{20}{3}$，則橢圓之方程式為__________。

【解答】$\dfrac{(x-1)^2}{20}+\dfrac{(y+1)^2}{36}=1$

【詳解】

已知焦點$F(1，3)$，$F'(1，-5)$，則中心爲$(1，-1)$，$2c=5-(-3)=8\Rightarrow c=4$

設橢圓方程式爲$\dfrac{(x-1)^2}{b^2}+\dfrac{(y+1)^2}{a^2}=1$（$a>b>0$）　$\Rightarrow$　$\begin{cases} b^2=a^2-16 \cdots\cdots ① \\ \dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{20}{3} \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

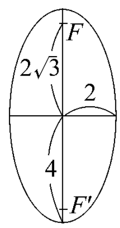
由①代入②知，$3a^2-10a-48=0$　$\Rightarrow$　$(3a+8)(a-6)=0$　$\Rightarrow$　$a=6$ 或$a=-\dfrac{8}{3}$（不合）

$\therefore$　$a=6$　$\Rightarrow$　$b^2=20$，故橢圓之方程式爲$\dfrac{(x-1)^2}{20}+\dfrac{(y+1)^2}{36}=1$

2. 橢圓 $4x^2+y^2+8x-4y-8=0$ 的
(1)中心坐標爲__________。　(2)焦點坐標爲__________。　(3)正焦弦長 $=$________。
(4)橢圓上任一點到兩焦點的距離和 $=$__________。

【解答】(1)$(-1，2)$　(2)$(-1，2\pm2\sqrt{3})$　(3) 2　(4) 8

【詳解】

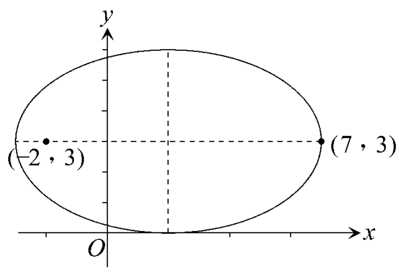


$4x^2+y^2+8x-4y-8=0$ 配方$\Rightarrow$　$4(x+1)^2+(y-2)^2=16\Rightarrow\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

$b^2=4$，$a^2=16$　$\Rightarrow$　$c^2=a^2-b^2=12$　$\Rightarrow$　$a=4$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$

(1)中心$(-1，2)$　(2)焦點$(h，k\pm c)=(-1，2\pm2\sqrt{3})$

(3)正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times4}{4}=2$　(4) $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=8$



3. 已知一橢圓之一焦點爲$(-2，3)$，一長軸頂點爲$(7，3)$，且短軸長爲 6，則此橢圓方程式爲_______。

【解答】$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

【詳解】

$2b=6$，$b=3$，一焦點爲$(-2，3)$，一長軸頂點爲$(7，3)\Rightarrow a+c=9$，$a-c=1\Rightarrow a=5$，$c=4$，

中心$(h，k)=(7-a，3)=(7-5，3)=(2，3)$，故所求：$\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$

4. 設H：$\dfrac{x^2}{16-t}+\dfrac{y^2}{t+2}=1$（$t\in R$）表兩焦點在$y$軸之橢圓，則$t$値範圍爲____________。

【解答】$7<t<16$

【詳解】

所求爲直橢圓　$\Rightarrow$　$\begin{cases} 16-t>0 \\ t+2>0 \\ 16-t<t+2 \end{cases}$　$\Rightarrow$ 重疊區域　$7<t<16$

5. 以(0，2)，(6，2)爲兩焦點，10 爲長軸長的橢圓方程式爲______________，此橢圓在短軸上的兩頂點坐標分別爲____________與____________。

【解答】$\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$；(3，6)；(3，－2)

【詳解】

$F_1(0，2)，F_2(6，2)\ \Rightarrow\ \overline{F_1F_2}=2c=6$，　∴　$c=3$ 且爲橫橢圓

中心$(\dfrac{0+6}{2}，\dfrac{2+2}{2})=(3，2)$，$2a=10\ \Rightarrow\ a=5$，∴　$b=\sqrt{a^2-c^2}=4$

∴　$\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$，短軸頂點$(3，2\pm 4)$，即(3，6)，(3，－2)

6. 橢圓短軸兩端點坐標爲(－1，1)，(3，1)，正焦弦長$\dfrac{8}{3}$，則橢圓方程式爲________________。

【解答】$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

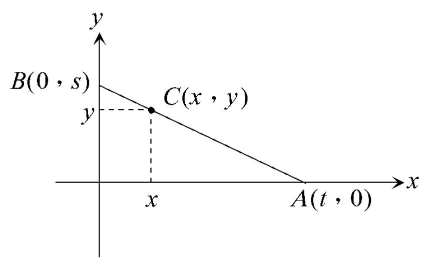
【詳解】

短軸端點(－1，1)，(3，1)　$\Rightarrow 2b=3-(-1)=4\ \Rightarrow\ b=2$，正焦弦長$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{8}{3}\ \Rightarrow a=3$

中心(1，1)且短軸在直線 $y=1$ 上，長軸在 $x=1$ 上，故橫橢圓方程式爲$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

7. 若線段$\overline{AB}$之長爲 5，其上一點C使$\overline{AC}：\overline{CB}=3：2$，當$A$在$x$軸上移動，$B$在$y$軸上移動，則動點$C$所形成的圖形方程式爲____________，此圖形上相異兩點距離的最大值 ＝______。

【解答】$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$；6



【詳解】

如上圖，設$A(t，0)$，$B(0，s)$，$\overline{AB}=5=\sqrt{t^2+s^2}\Rightarrow t^2+s^2=25$，

設$C(x，y)$，因爲$\overline{AC}：\overline{CB}=3：2$，所以$(x, y)=(\dfrac{2}{5}t，\dfrac{3}{5}s)$

即$t=\dfrac{5}{2}x$，$s=\dfrac{5}{3}y$，代入$t^2+s^2=25\Rightarrow \dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{25}{9}y^2=25$

即點C的圖形爲方程式$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 圖形爲橢圓，橢圓上相異兩點的最大距離爲長軸長 ＝6

8. 設$A(2，-4)$，$B(4，0)$，且$P(x，y)$爲橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上任一點，則當$(x，y)=$__________時，$\triangle ABP$之面積有最小值 ＝__________。

【解答】$(\dfrac{9}{\sqrt{10}}，-\dfrac{2}{\sqrt{10}})$；$-2\sqrt{10}+8$

【詳解】

P 在$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，令 $P(3\cos\theta，2\sin\theta)$，則$\triangle ABP$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3\cos\theta & 2 \\ -4 & 0 & 2\sin\theta & -4 \end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|\,0+16+8\sin\theta-12\cos\theta-4\sin\theta\,|=\dfrac{1}{2}|\,4\sin\theta-12\cos\theta+16\,|=\dfrac{1}{2}|\sqrt{16+144}\cdot\sin(\theta-\phi)+16\,|$

其中，$\cos\phi = \dfrac{4}{\sqrt{160}}$，$\sin\phi = \dfrac{12}{\sqrt{160}}$，當 $\sin(\theta-\phi) = -1 \Rightarrow \theta-\phi = \dfrac{3\pi}{2}$ 時

$\triangle ABP$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{160}+16) = -2\sqrt{10}+8$ 為最小值

此時，$(x，y) = (3\cos\theta，2\sin\theta) = (3\cos(\dfrac{3\pi}{2}+\phi)，2\sin(\dfrac{3\pi}{2}+\phi))$

$= (+3\sin\phi，-2\cos\phi) = (+3\cdot\dfrac{12}{4\sqrt{10}}，-2\cdot\dfrac{4}{4\sqrt{10}}) = (\dfrac{9}{\sqrt{10}}，-\dfrac{2}{\sqrt{10}})$

9. 若橢圓之兩焦點 $F(-4，-4)$，$F'(0，0)$ 且 $P(\sqrt{2}，-\sqrt{2})$ 為其上一點，則橢圓之長軸長度為____，正焦弦長__________。

【解答】8；4

【詳解】

已知橢圓二焦點 $F(-4，-4)$，$F'(0，0)$，$P(\sqrt{2}，-\sqrt{2})$

$2a = \overline{PF}+\overline{PF'} = \sqrt{(\sqrt{2}+4)^2+(-\sqrt{2}+4)^2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2} = 8$，$a=4$ 且長軸長度為 8

又 $2c = \overline{FF'} = 4\sqrt{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$，$b = \sqrt{a^2-c^2} = 2\sqrt{2}$，故正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2\times(2\sqrt{2})^2}{4} = 4$

10. $\triangle ABC$ 中，已知 $A(-1，-2)$，$B(5，-2)$，若 $\triangle ABC$ 之周長為 16，則點 C 之軌跡在一個圓錐曲線 Γ 上，Γ 的方程式為____________________________。

【解答】$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

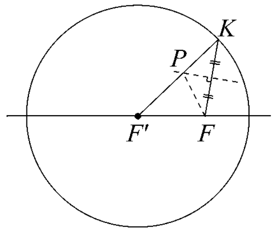
【詳解】

$\triangle ABC$ 之周長為 $16 \Rightarrow \overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB} = 16$，又 $\overline{AB} = 6$，$\Rightarrow \overline{AC}+\overline{BC} = 10$

設 $C(x，y)$，則點 C 之軌跡在一個以 $(\dfrac{-1+5}{2},\dfrac{-2-2}{2}) = (2,-2)$ 為中心，$x=2, y=-2$ 為兩軸的橫橢圓 Γ 上(不含長軸上兩頂點)，且 $2a=10, 2c=5-(-1)=6 \Rightarrow a=5, b=\sqrt{a^2-c^2}=4$

Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$　(　不含長軸上兩頂點 $(2\pm5,-2)$　)

11. 設二定點 $F(5，2)$，$F'(-1，2)$，以 F' 為中心，10 單位長為半徑畫圓，令 K 為此圓上的動點，P 為 $\overline{KF}$ 中垂線與直線 $\overleftrightarrow{KF'}$ 的交點，則 K 在圓上轉一周時，P 點的軌跡方程式為__________。



【解答】$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

【詳解】

$\because$　$\overline{FF'} = 6 < 10$　$\therefore$　F 在圓內，又　$\because P$ 為 $\overline{KF}$ 中垂線與 $\overleftrightarrow{KF}$ 之交點，$\therefore \overline{PF} = \overline{PK}$

$\Rightarrow$　$\overline{PF}+\overline{PF'} = \overline{PK}+\overline{PF'} = \overline{F'K} = 10$　軌跡為以 F，F' 為二焦點，長軸長 $=10$ 的橢圓，

且中心 $(\dfrac{-1+5}{2}，\dfrac{2+2}{2}) = (2，2)$，$a=5$，$c=3$　$\Rightarrow$　$b=4$，故方程式為 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

12. 橢圓中心 $(2，1)$，長軸在直線 $x=2$ 上，過此橢圓長軸之一頂點的二個焦半徑為 2 與 8，

(1)此橢圓之方程式為________。 (2)此橢圓之二焦點為________。

【解答】(1) $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$ (2) $(2，-2)，(2，4)$

【詳解】直橢圓

$\begin{cases} a+c=8 \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow \quad a=5，\ c=3 \quad ，\therefore \quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\ 4$

$\therefore$ 橢圓 Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，二焦點為$(2，-2)，(2，4)$

13.橢圓 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$ 的圖形與x軸有兩交點，其坐標分別為________與________。

【解答】$(8，0)，(-8，0)$

【詳解】

設 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$ 與x軸的交點$(t，0)$，$\dfrac{t^2}{100}+\dfrac{9}{25}=1\Leftrightarrow t^2=100(1-\dfrac{9}{25})=\dfrac{16\times100}{25}\Leftrightarrow t=\pm8$，故與$x$軸交點$(8，0)，(-8，0)$

14.若橢圓Γ的方程式為$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{10}$，則$\Gamma$的短軸長 $=$________，長軸所在的直線方程式為________。及長軸的頂點________。

【解答】$2\sqrt{5}$；$y=2x$；$(1+\sqrt{2},2+2\sqrt{2}),(1-\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$

【詳解】

由橢圓Γ的方程式$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{10}$，知$\Gamma$的兩焦點$(2，4)，(0，0)$，

長軸長 $=2\sqrt{10}=2a$，兩焦點距離 $=2c=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$b^2=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2=5$，$b=\sqrt{5}$，

Γ的短軸長 $=2\sqrt{5}$，長軸所在的直線斜率 $=\dfrac{4-0}{2-0}=2$，方程式$y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x$

Γ的兩焦點$(2，4)，(0，0)\Rightarrow$中心$(1,2)$，

長軸的頂點$(1,2)\pm\sqrt{10}\cdot\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}=(1+\sqrt{2},2+2\sqrt{2}),(1-\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$

15.若一橢圓的兩焦點坐標分別為$(-2，5)，(-2，-3)$；且經過點$(-5，1)$，則此橢圓之方程式為________；其正焦弦長為________。

【解答】$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，$\dfrac{18}{5}$

【詳解】

橢圓Γ 兩焦點 $F(-2，5)$，$F'(-2，-3)$，$\therefore$中心$(-2，1)$，$2c=\overline{FF'}=8$，其長軸垂直x軸

設Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{b^2}+\dfrac{(y-1)^2}{a^2}=1$，$a^2=b^2+c^2=b^2+16$

Γ 過$(-5，1)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{0}{a^2}=1$，$\therefore$ $b^2=9$，$a^2=25$

$\therefore$ Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot9}{5}=\dfrac{18}{5}$

16.與橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$共焦點且過點(3，3)之橢圓方程式為__________。

【解答】$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

【詳解】

設橢圓為$\dfrac{x^2}{9+t}+\dfrac{(y-1)^2}{4+t}=1$，則將(3，3)代入，∴　$\dfrac{9}{9+t}+\dfrac{4}{4+t}=1$

$\Rightarrow$　$36+9t+36+4t=36+9t+4t+t^2 \Rightarrow t^2=36 \Rightarrow t=6$ 或 -6（不合），故$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

17.設P為橢圓 $3x^2+16y^2=16$ 上的一點，其至直線 $3x+4y=12$ 有最短距離d，則P的坐標為_____，$d=$__________。

【解答】$P(2，\dfrac{1}{2})$，$d=\dfrac{4}{5}$

【詳解】

$3x^2+16y^2=16 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{\frac{16}{3}}+y^2=1$，設$P(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta，\sin\theta)$

P到直線L：$3x+4y=12$ 的距離$d(P，L)=\dfrac{|4\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta-12|}{\sqrt{9+16}}$

$=\dfrac{4}{5}\ |\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-3|=\dfrac{4}{5}\ |2(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})-3|$

$=\dfrac{4}{5}\ |2(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3})-3|=\dfrac{4}{5}\ |2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})-3|$

最小值$d=\dfrac{4}{5}\ |2-3|=\dfrac{4}{5}$，此時$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})=1$，$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta=\dfrac{\pi}{6}$，

∴　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　∴　P點坐標為$(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta，\sin\theta)=(2，\dfrac{1}{2})$

18.已知平面上一橢圓的兩焦點是(6，0)，(0，8)，長軸長 20，求

(1)中心。　(2)短軸的斜率。　(3)長軸的頂點。　(4)橢圓之短軸長。

【解答】(1) (3，4)　(2)$\dfrac{3}{4}$　(3) $(-3，12)$，$(9，-4)$　(4) $10\sqrt{3}$

【詳解】

(1)設$F(6，0)$，$F'(0，8)$，則中心為$\overline{FF'}$之中點C，中心$C(\dfrac{6+0}{2}，\dfrac{0+8}{2})$，即$C(3，4)$

(2)長軸之斜率即$\overline{FF'}$之斜率，$\dfrac{0-8}{6-0}=-\dfrac{4}{3}$，又短軸與長軸垂直，則短軸的斜率為$\dfrac{3}{4}$

(3)$\overline{CF}=5$，$\overline{AC}$為長軸之半$=10$，如右下圖，F為$\overline{AC}$之中點，得$A(9，-4)$

F' 為$\overline{BC}$之中點，$\Rightarrow$　$B=(-3，12)$

(4) $b^2=a^2-c^2=10^2-5^2=75$　∴　$b=5\sqrt{3}$，短軸長為 $2b=10\sqrt{3}$