高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.02. 27					
範圍	1-2 拋物線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 以$F(0，1)$為焦點，以$L：y = -1$ 為準線的拋物線的方程式為何？

(A) $y^2 = 4x$ (B) $y^2 = -4x$ (C) $x^2 = 4y$ (D) $x^2 = -4y$ (E) $y = x^2$

【解答】(C)

【詳解】

焦點$F(0，1)$，準線$L：y = -1$ $\Rightarrow$ 對稱軸方程式為$x = 0$，開口向上

$4|c| = 4 \times 1 = 4$，頂點$(0，0)$，由標準式得拋物線方程式為$x^2 = 4y$

2. (複選)已知一拋物線之焦點為$(1，1)$，準線為 $y + 3 = 0$，則下列何者正確？

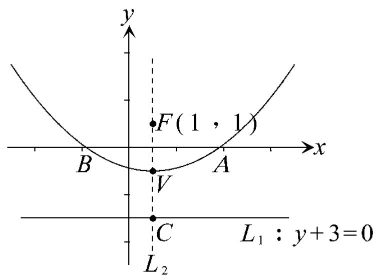
(A)其頂點為$(-1，1)$ (B)其焦距為 2 (C)其對稱軸為 $x = -1$

(D)若此拋物線與 x 軸交於 A，B 兩點，則 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$

(E)過 $P(1，-1)$且與其相切之直線方程式為 $x = 1$

【解答】(B)(D)

【詳解】



已知焦點$F(1，1)$，準線$L_1：y + 3 = 0$，則拋物線如右圖，對稱軸

$L_2 \perp L_1$且過$F(1，1)$，對稱軸$L_2：x - 1 = 0$，L_1，L_2之交點$C(1，-3)$

$\therefore$ 頂點V為$\overline{CF}$ 之中點$(1，-1)$，焦距 $|c| = \overline{VF} = 2$，過$V(1，-1)$

且與拋物線相切之直線為$y = -1$

拋物線$\Gamma：(x - 1)^2 = 8(y + 1)$……①，

令$y = 0$ 代入① $\Rightarrow$ $(x - 1)^2 = 8$，得$x = 1 \pm 2\sqrt{2}$

即$A(1 + 2\sqrt{2}，0)$，$B(1 - 2\sqrt{2}，0)$ $\Rightarrow$ $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$

3. (複選)拋物線$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$，下列何者正確？

(A)開口向上 (B)頂點$(-2，1)$ (C)正焦弦長 $= 4$ (D)焦點$F(2，1)$ (E)準線$\rho：x + 3 = 0$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$ $\Rightarrow$ $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

$\therefore$ 此拋物線開口向右，頂點$V(-2，1)$，$c = 1$

$\therefore$ 焦點$F(-1，1)$，準線$\rho：x = -3$，正焦弦長 $= 4c = 4$

二、填充題(每題 10 分)

1. 拋物線$(x - 3)^2 = 8(y + 1)$的頂點坐標為__________，焦點坐標為__________，準線方程式為__。

【解答】$(3，-1)$；$(3，1)$；$y = -3$

【詳解】

$(x - 3)^2 = 4 \times 2(y + 1)$，$c = 2$，頂點$(3，-1)$，焦點$(3，-1 + 2) = (3，1)$，準線$y + 1 = -2 \Rightarrow y = -$

3

2. 抛物線$x^2-2x+4y-5=0$的對稱軸方程式爲＿＿＿＿＿，頂點坐標爲＿＿＿＿＿，焦點坐標爲＿＿＿＿＿，準線方程式爲＿＿＿＿＿，正焦弦長 =＿＿＿＿＿。

【解答】$x-1=0$；$(1，\frac{3}{2})$；$(1，\frac{1}{2})$；$y=\frac{5}{2}$ ；4

【詳解】

$x^2-2x+4y-5=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2=-4y+6 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2=4\times(-1)(y-\frac{3}{2})$，開口向下

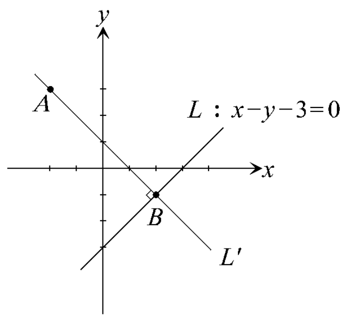
(1)軸爲$x-1=0$　　(2)頂點$(1，\frac{3}{2})$　　(3)$c=-1$，焦點$(1，\frac{3}{2}-1)=(1，\frac{1}{2})$

(4)準線$y=\frac{3}{2}-(-1) \quad\Rightarrow\quad y=\frac{5}{2}$　　(5)正焦弦長 $=\left|-4\right|=4$

3. 已知一抛物線之準線方程式爲$x-y-3=0$，焦點坐標爲$(-2，3)$，則頂點坐標爲＿＿＿＿＿，若點$(t，-1)$在此抛物線上，則$t=$＿＿＿＿＿。

【解答】$(0，1)$， -6

【詳解】



抛物線Γ 準線方程式 $L：x-y-3=0$，焦點 $A(-2，3)$

$\therefore$ 對稱軸方程式 $L'：x+y=1$，與 L 交點爲 $B(2，-1)$，

$\overline{AB}$ 中點$(0，1)$爲Γ 頂點

設點 $P(t， -1)$，根據抛物線定義 $d(P,L)=\overline{PA}\Rightarrow$

$$\frac{|\ t-(-1)-3\ |}{\sqrt{2}}=\sqrt{(t+2)^2+(-1-3)^2} \quad\Rightarrow\quad t=-6$$

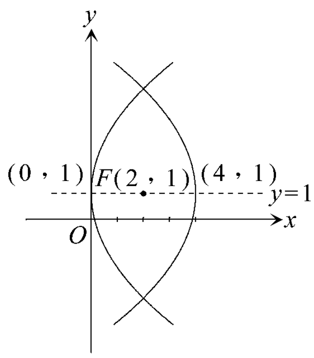
4. 根據下列條件，求出抛物線之方程式。

(1)焦點$(2，1)$，準線平行於y軸，正焦弦長爲 8：＿＿＿＿＿。

(2)頂點$(0，0)$，焦點在直線$x-y=2$上，對稱軸爲y軸：＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $(y-1)^2=8x$或$(y-1)^2=-8(x-4)$　(2) $x^2=-8y$

【詳解】



(1)焦點$F(2，1)$，準線平行於y軸$\Rightarrow$軸的方程式爲$y=1$(即垂直y軸)

$4|c|=8 \quad\Rightarrow\quad 4c=\pm 8 \quad\Rightarrow\quad c=\pm 2$

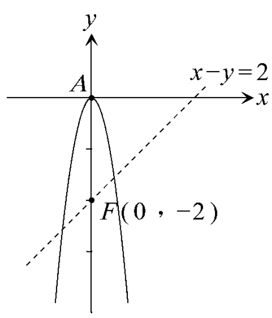
① $c=2$時，抛物線開口向右，頂點在焦點$F(2，1)$的左方

頂點坐標爲$(0，1)$，抛物線方程式爲$(y-1)^2=8x$

② $c=-2$時，抛物線開口向左，頂點在焦點$F(2，1)$的右方，

頂點坐標爲$(4，1)$，抛物線方程式爲$(y-1)^2=-8(x-4)$

$\therefore$ 抛物線方程式爲$(y-1)^2=8x$或$(y-1)^2=-8(x-4)$



(2)焦點在直線$x-y=2$上，也在對稱軸$x=0$上，$\therefore$焦點坐標爲$F(0，-2)$

又頂點$A(0，0)$，$\therefore$ $|c|=\overline{AF}=2$，又抛物線開口向下$\Rightarrow c=-2$，

故抛物線方程式爲$x^2=-8y$

5. 頂點$A(1，1)$，焦點$F(2，3)$的拋物線其準線方程式爲＿＿＿＿＿，正焦弦長爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x+2y=-2$，$4\sqrt{5}$

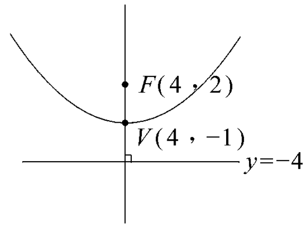
【詳解】

頂點 $A(1，1)$，焦點 $F(2，3)$，則對稱軸爲過 A，F 之直線方程式：$\dfrac{y-1}{x-1}=\dfrac{3-1}{2-1}$ $\Rightarrow$ $2x-y=1$

設準線方程式爲 $x+2y=k$，設準線與對稱軸交於 $B(a，b)$，則 $A(1，1)$爲 $F(2，3)$與 $B(a，b)$之中點，$\therefore(a，b)=(0，-1)$ $\Rightarrow$ $0-2=k$ $\Rightarrow$ $k=-2$

$\therefore$ 準線方程式：$x+2y=-2$，正焦弦長 $=4|c|=4\overline{AF}=4\sqrt{1^2+2^2}=4\sqrt{5}$

6. 一拋物線的頂點$(4，-1)$，焦點$(4，2)$，則拋物線之準線方程式爲＿＿＿＿＿，正焦弦長 $=$＿，拋物線方程式爲＿＿＿＿＿。



【解答】$y=-4$，12，$(x-4)^2=12(y+1)$

【詳解】

頂點$V(4，-1)$，焦點$F(4，2)$，$c=\overline{VF}=3$，

準線$y=-1-3\Rightarrow y=-4$，正焦弦長 $=4|c|=12$，軸爲$x-4=0$，

$\therefore$拋物線方程式爲$(x-4)^2=12(y+1)$

7. 拋物線$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$的對稱軸方程式爲＿＿＿＿＿，頂點坐標爲＿＿＿＿＿，正焦弦長爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x-y=0$，$(0，0)$，$8\sqrt{2}$

【詳解】

拋物線$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$，焦點 $F(2，2)$，準線 L：$x+y+4=0$

設對稱軸方程式爲 $x-y+k=0$，過焦點 $F(2，2)$ $\Rightarrow$ $2-2+k=0$ $\Rightarrow$ $k=0$

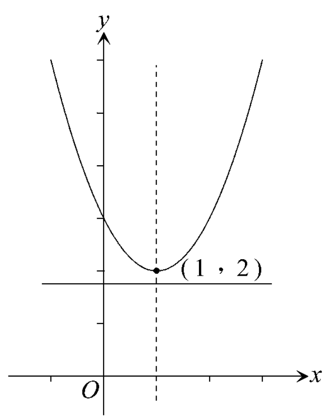
$\therefore$ 對稱軸方程式爲 $x-y=0$，又$\begin{cases}x+y+4=0\\x-y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $A(-2，-2)$

則頂點爲 A 與 F 中點 $\therefore$ 頂點$\left(\dfrac{-2+2}{2}，\dfrac{-2+2}{2}\right)=(0，0)$

正焦弦長 $=2\overline{AF}=2\sqrt{(-2-2)^2+(-2-2)^2}=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

8. 過$(0，3)$，$(1，2)$，$(-1，6)$三點且對稱軸垂直x軸之拋物線的

(1)方程式爲＿＿＿＿＿。 (2)準線方程式爲＿＿＿＿＿。



【解答】(1) $y=x^2-2x+3$ (2) $y=\dfrac{7}{4}$

【詳解】

(1)設$y=ax^2+bx+c$，$(0，3)$，$(1，2)$，$(-1，6)$三點代入

得$\begin{cases}3=c\\2=a+b+c\\6=a-b+c\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\end{cases}$，即$y=x^2-2x+3$

(2) $y=x^2-2x+3$ $\Rightarrow$ $(x-1)^2=(y-2)$，

$4c=1$，$c=\dfrac{1}{4}$　∴　準線$y=2-\dfrac{1}{4}$　⇒　$y=\dfrac{7}{4}$

9. 與直線 $2x+3y+2=0$ 及點$(1，-1)$等距離的點的軌跡方程式爲__________。

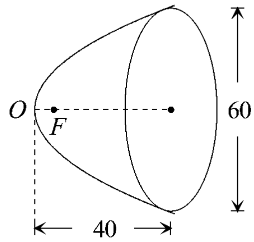
【解答】$9x^2-12xy+4y^2-34x+14y+22=0$

【詳解】

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\dfrac{|2x+3y+2|}{\sqrt{13}}$　⇒平方之　$13(x-1)^2+13(y+1)^2=(2x+3y+2)^2$

⇒　$9x^2-12xy+4y^2-34x+14y+22=0$

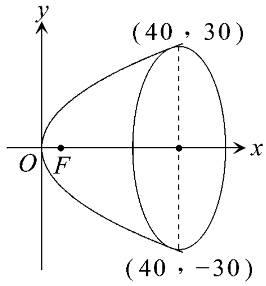
10.探照燈的外殼是拋物線繞它的對稱軸旋轉一周所形成的曲面，如圖所示。已知燈口處的直徑是 60 公分，燈的深度是 40 公分，則焦距________公分。



【解答】$\dfrac{45}{8}$

【詳解】

建立坐標系，頂點O爲原點，則設拋物線方程式爲$y^2=4cx$，過$(40，30)$與$(40，-30)$⇒　$(30)^2=4c(40)$　⇒　$c=\dfrac{900}{160}=\dfrac{45}{8}$，即焦距 $=\dfrac{45}{8}$



11.設拋物線Γ 的頂點爲$(1，4)$，準線爲 $2x+1=0$，則Γ 的方程式爲______，又拋物線Γ'與Γ 對稱於y軸，則Γ'的方程式爲________。

【解答】$(y-4)^2=6(x-1)$；$(y-4)^2=-6(x+1)$

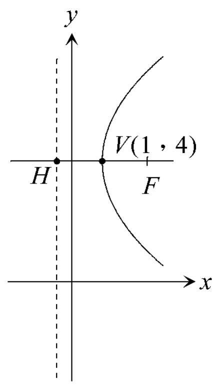
【詳解】

以$(1，4)$爲頂點，$L：2x+1=0$ 爲準線的拋物線Γ，如圖，對稱軸與準線的交點$H(\dfrac{-1}{2}，4)$，所以焦點$(1+\dfrac{3}{2}，4)=(\dfrac{5}{2}，4)$，$c=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$，

故拋物線方程式爲$(y-4)^2=4\times\dfrac{3}{2}(x-1)$，即$\Gamma：(y-4)^2=6(x-1)$，

拋物線Γ'與Γ 對稱於y軸，則Γ'的頂點$(-1，4)$，開口朝左，

故Γ'的方程式爲$(y-4)^2=-6(x+1)$



12.設 $5[(x+1)^2+(y-2)^2]=(x+2y+2)^2$之軌跡爲$\Gamma$，則

(1) Γ 之對稱軸方程式爲________。　(2) Γ 之正焦弦長爲________。(3) Γ 之頂點爲______。

【解答】(1) $2x-y+4=0$　(2) $2\sqrt{5}$　(3) $(-2，0)$

【詳解】

$5[(x+1)^2+(y-2)^2]=(x+2y+2)^2$　⇒　$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+2y+2|}{\sqrt{5}}$

∴　焦點$F(-1，2)$，準線$\rho：x+2y+2=0$

(1)對稱軸爲過$(-1，2)$且斜率爲 2 的直線　∴　$2(x+1)-(y-2)=0$　⇒　$2x-y+4=0$

(2)正焦弦長 $=2\cdot d(F，\rho)=2\cdot\dfrac{|-1+4+2|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(3) $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 頂點 $V(-2，0)$

13.拋物線 $y=x^2-(k-2)x-2k$ 與 x 軸交於 A，B 兩點，且 $\overline{AB}=6$，求 k 值。

【解答】-8 或 4

【詳解】

設 $A(\alpha，0)$，$B(\beta，0)$，則 $\begin{cases} y=0 \\ y=x^2-(k-2)x-2k \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x^2-(k-2)x-2k=0$ 之兩根 $\alpha，\beta$ $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=k-2，\alpha\beta=-2k$

且 $\overline{AB}=|\alpha-\beta|=6$，$\therefore(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ $\Rightarrow$ $36=(k-2)^2+8k$

$\Rightarrow$ $k^2+4k-32=0$ $\Rightarrow$ $(k+8)(k-4)=0$ $\Rightarrow$ $k=4$ 或 -8

14.給兩個點 $A(1，-5)$，$B(3，-3)$，且點 P 是拋物線 $y=x^2$ 上的任一點，試求△ABP 面積的最小值__________，並寫出對應的 P 點坐標__________。

【解答】△ABP 面積的最小值 $=\dfrac{23}{4}$，$P(\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{4})$

【詳解】

設 $P(t，t^2)$，且 $A(1，-5)$，$B(3，-3)$，則 $\overrightarrow{AP}=(t-1，t^2+5)$，$\overrightarrow{AB}=(2，2)$，

則△$ABP=\dfrac{1}{2}|\begin{vmatrix} t-1 & t^2+5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}|=\dfrac{1}{2}\left|2(t-1)-2(t^2+5)\right|=\left|t^2-t+6\right|=\left|(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{23}{4}\right|$

當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時，△ABP 面積有最小值 $=\dfrac{23}{4}$，此時 $P(\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{4})$

15.設圓 C 與圓 $x^2+y^2-4x+3=0$，及直線 L：$x-5=0$ 相切，則動圓 C 的圓心軌跡方程式為何？

【解答】$y^2=-8(x-4)$，$y^2=-4(x-3)$

【詳解】

$x^2+y^2-4x+3=0$ $\Rightarrow$ $(x-2)^2+y^2=1$，圓心 $C_1(2，0)$，半徑 $r=1$

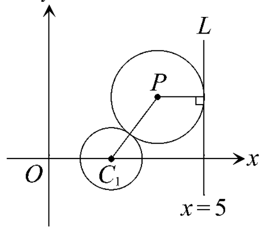
令 C 之圓心 $P(x，y)$，則

(1) C 與 C_1 外切時，$\overline{PC_1}=r+1=d(P，L)+1$

$\Rightarrow$ P 的軌跡是以 $C_1(2，0)$ 焦點、$x=5+1$ 為準線的拋物線

$\Rightarrow$ 頂點 $(4,0)$，$c=-2$

$\Rightarrow$ $(y-0)^2=4\times(-2)\times(x-4)$ $\Rightarrow$ $y^2=-8(x-4)$



(2) C 與 C_1 內切時，$\overline{PC_1}=r-1=d(P，L)-1$

$\Rightarrow$ P 的軌跡是以 $C_1(2，0)$ 焦點、$x=5-1$ 為準線的拋物線

$\Rightarrow$ 頂點 $(3,0)$，$c=-1$

$\Rightarrow$ $(y-0)^2=4\times(-1)\times(x-3)$ $\Rightarrow$ $y^2=-4(x-3)$