高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：97.01. 07
範圍	3-2 圓與直線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 在條件 $x^2+y^2\le 1$ 之下，求 $x+y$ 的最大值 M 與最小值 m，則 (A) $M=1,\ m=-1$ (B) $M=\sqrt{2},\ m=-\sqrt{2}$ (C) $M=1,\ m=0$ (D) $M=\sqrt{2},\ m=0$ (E) $M=\sqrt{3},\ m=0$

解析：$x+y$ 之最大值與最小值發生在 $x^2+y^2=1$ 上

$\therefore x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ x+y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}(\sin(\theta+\frac{\pi}{4}))$，$\therefore -\sqrt{2}\le x+y\le\sqrt{2}$

2、(E) 已知圓 $C:(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 與直線 $L:x+ky-2=0$ 相切，則 $k=$

(A)–3 (B)$-\frac{1}{3}$ (C)0 (D)$\frac{1}{3}$ (E)3

解析：$\frac{|1-3k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{10}$ ， $(k-3)^2=0\Rightarrow k=3$

3、(E) 設直線 $5x-y-a=0$ 切圓：$3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$ 於點 $A(c,-1)$，求 $a+b+c=$ ？

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5 (E)6

解析：Sol 一：

過切點 $A(c,-1)$ 之切線 $3xc-3y-2(\frac{x+c}{2})+4(\frac{y-1}{2})+b=0\Rightarrow(3c-1)x-y+(b-c-2)=0$

此與 $5x-y-a=0$ 表同一直線：

$\frac{3c-1}{5}=\frac{-1}{-1}=\frac{b-c-2}{-a}\Rightarrow\begin{cases}3c-1=5\\ b-c-2=-a\end{cases}$，又 $5c+1-a=0$ ，$\begin{cases}c=2\\ a=11\\ b=-7\end{cases}$

Sol 二：

圓：$3x^2+3y^2-2x+4y+b=0\Rightarrow x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{b}{3}=0$ ，$\therefore$圓心 $C(\frac{1}{3},\frac{-2}{3})$，

$m_{AC}=\frac{-1+\frac{2}{3}}{c-\frac{1}{3}}$ ，又切線斜率 $=5\Rightarrow\frac{-1+\frac{2}{3}}{c-\frac{1}{3}}\times 5=-1\Rightarrow c=2$ ，即 $A(2,-1)$，代入 $5x-y-a=0$

$\therefore 10+1-a=0,\ 12+3-4-4+b=0\Rightarrow a=11,\ b=-7$ ，$\therefore a+b+c=11-7+2=6$

4、(D) 圓心在點(9,7)同時又與圓 $x^2+y^2+2x-4y=15$ 相切的兩圓中較小者的半徑是

(A)$7\sqrt{5}$ (B)$\sqrt{5}$ (C)5 (D)$3\sqrt{5}$ (E)$2\sqrt{5}$

解析：兩圓之連心線長為 $5\sqrt{5}$ ，又圓 $x^2+y^2+2x-4y=15$ 之半徑為 $2\sqrt{5}$

故當兩圓外切時，半徑較小為 $5\sqrt{5}-2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

5、(C) 設二直線 $2x-y=11$ 及 $y-x=13$ 的交點為 Q，令 P 表示圓 $x^2+y^2=10y$ 上離 Q 最近的點，則 P 的坐標 $(x,y)=$ (A)(0,10) (B)(4,9) (C)(3,9) (D)(4,8) (E)(5,5)

解析：二直線 $2x-y=11$ 及 $y-x=13$ 的交點 $Q(24,37)$，

圓 $x^2+(y-5)^2=5^2$ 之圓心為 $C(0,5)$，半徑為 5，$\overrightarrow{CQ}=(24,32)=8(3,4)$

$\therefore P$ 為 $(0,5)+5\times\dfrac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=(3,9)$

6、(B)　與圓 $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ 關於直線 $7x+5y=1$ 對稱的圓是

(A) $x^2+y^2+8x+4y+16=0$　(B) $x^2+y^2+6x+6y+14=0$　(C) $x^2+y^2+4x+8y+16=0$

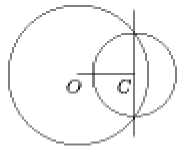
(D) $x^2+y^2-4x-8y+16=0$　(E) $x^2+y^2-6x-6y+14=0$

$\boxed{\text{解析}}$：圓心為(4,2)，半徑為 2，對 $7x+5y=1$ 之對稱圓之圓心為 $(4,2)-2\times\dfrac{37}{\sqrt{74}}\times\dfrac{(7,5)}{\sqrt{74}}=(-3,-3)$

$\therefore$ 對稱圓為 $(x+3)^2+(y+3)^2=4$

7、(C)　圓 $O: x^2+y^2=k$ 將圓 $C: x^2+y^2-6x-2y+4=0$ 之圓周長平分，則 $k=$

(A)4　(B)9　(C)16　(D)25　(E)36



$\boxed{\text{解析}}$：圓 $C: x^2+y^2-6x-2y+4=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{6})^2$

圓 C 之半徑為 $\sqrt{6}$，圓心 $C(3,1)$

$\because$ 圓 O 將圓 C 之圓周長平分，兩圓相交之公弦必為圓 C 之直徑，$\overline{OC}=\sqrt{10}$，

$\therefore$ 圓 O 之半徑為 $\sqrt{6+10}=4$，$\therefore k=16$

8、(B)　設圓 O: $x^2+y^2=27$，以 $A(3,-4)$ 為中點的弦的方程式為 $x+by+c=0$，求 $b=$？

(A) $-\dfrac{5}{3}$　(B) $-\dfrac{4}{3}$　(C) $-\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{3}{4}$　(E) $\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：Sol 一：

令 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與圓 O 交於 $P(x_1,y_1)$ 及 $Q(x_2,y_2)$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=3\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=6\\ y_1+y_2=-8\end{cases}，\quad 又\begin{cases}{x_2}^2+{y_2}^2=27\cdots\cdots①\\ {x_1}^2+{y_1}^2=27\cdots\cdots②\end{cases}$$

由①–②得 $(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0 \Rightarrow (x_2-x_1)(x_2+x_1)=-(y_2-y_1)(y_2+y_1)$

$$\therefore m=\frac{-1}{b}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\frac{-4}{3}$$

Sol 二：

$x+by+c=0\Rightarrow \overrightarrow{n}=(1,b)$，又 $\overrightarrow{OA}=(3,-4)$

$\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{OA}\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{b}{-4}$，即 $b=\dfrac{-4}{3}$

9、(B)　已知點 $A(-3,4)$ 為圓 $O: x^2+y^2=41$ 內一點，則以 A 為中點之弦方程式為直線 L，而 L 之斜率 $m=$　(A) $\dfrac{4}{3}$　(B) $\dfrac{3}{4}$　(C)0　(D) $-\dfrac{3}{4}$　(E) $-\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\overrightarrow{OA}=(-3,4)$，$\overrightarrow{OA}\perp L$，$\therefore L$ 之斜率 $m=-\dfrac{-3}{4}=\dfrac{3}{4}$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 設圓 C 的方程式為 $2x^2+2y^2-x-3y-5=0$，則過點 $P(2,1)$的切線方程式為______。

答案：$7x+y-15=0$

解析：$\because P$ 為切點　$\therefore$切線方程式為 $2\times2\cdot x+2\times1\cdot y-(\frac{x+2}{2})-3(\frac{y+1}{2})-5=0 \Rightarrow 7x+y-15=0$

2、 設圓 C 的方程式為 $(x-3)^2+y^2=25$，則過點 $P(-1,3)$的切線方程式為________________。

答案：$4x-3y+13=0$

解析：$\because P$ 為切點　，　$\therefore$切線方程式為 $(-1-3)(x-3)+3y=25 \Rightarrow 4x-3y+13=0$

3、 求過 $A(-6, 4)$且與圓 C: $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 相切之切線方程式為__________________。

答案：$12x-5y+92=0$ 或 $x=-6$

解析：令切線 $y-4=m(x+6) \Rightarrow L$: $mx-y+(6m+4)=0$

$\therefore$圓 C: $x^2+y^2+2x-6y-15=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25$

$\therefore$圓心 $O(-1, 3)$，半徑 $r=5$，$\therefore d(O, L)=r \Rightarrow \left|\frac{-m-3+6m+4}{\sqrt{m^2+1}}\right|=5$

$\therefore 25m^2+10m+1=25(m^2+1)$，$\therefore m=\frac{12}{5}$，另一斜率不存在，

$\therefore$切線為 $y-4=\frac{12}{5}(x+6)$ 及 $x=-6$，即切線：$12x-5y+92=0$ 或 $x=-6$

4、 設直線 $L: y=\frac{3}{4}x+b$ 與圓 $x^2+y^2+2x-6y=6$ 相切，則 $b=$______ 或 ______。

答案：$\frac{35}{4}$; $\frac{-5}{4}$

解析：圓 $(x+1)^2+(y-3)^2=16$ 之圓心為$(-1,3)$，半徑為 4，切線之斜率為 $\frac{3}{4}$

$\therefore$切線公式為 $y-3=\frac{3}{4}(x+1)\pm4\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1} \Rightarrow y-3=\frac{3}{4}(x+1)\pm5$

$\Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{35}{4}$ 或 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$，　$\therefore b=\frac{35}{4}$ 或 $\frac{-5}{4}$

5、 設圓 C 的方程式為 $x^2+y^2+8x-2y+13=0$，已知直線 L 斜率為 2，且與圓 C 相切則直線 L 的方程式為______或______。

答案：$y=2x+9+2\sqrt{5}$; $y=2x+9-2\sqrt{5}$，L 斜率為 2，

解析：圓 C 之圓心為$(-4,1)$，半徑為 2

切線 L 為 $y-1=2(x+4)\pm2\sqrt{2^2+1} \Rightarrow L$ 為 $y=2x+9+2\sqrt{5}$ 或 $y=2x+9-2\sqrt{5}$

7、 自點 $A(-3,2)$作圓 $C:(x-1)^2+y^2=5$ 的二切線分別切圓 C 於 P, Q 兩點則 (1)直線 PQ 的方程式為______________, (2)又四邊形 $OPAQ$ 的面積為__________。

答案：(1) $4x-2y+1=0$　(2) $5\sqrt{3}$

解析：(1)切點弦 $\overline{PQ}$ 之方程式為 $(x-1)(-3-1)+2y=5\Rightarrow 4x-2y+1=0$

(2) $\overline{OA}=2\sqrt{5}$，圓 C 之半徑 $\sqrt{5}$，A 到圓 C 之切線段長為 $\sqrt{15}$

$\therefore$四邊形 $OPAQ$ 的面積為 $2\Delta APC=2\times(\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{5})=5\sqrt{3}$

8、 求圓 $C: x^2+y^2-6x-8y=0$ 上之點到直線 $L: 4x+3y+36=0$ 之最短距離為______。

答案：7

解析：圓 $C: x^2+y^2-6x-8y=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=25$，圓心 $C(3, 4)$，半徑 $r=5$

$d(C, L)=\left|\frac{12+12+36}{\sqrt{16+9}}\right|=12$，$\therefore$最短距離 $=d(O,L)-r=12-5=7$

9、 設圓 C 之圓心在 $x+y=3$ 上，且圓 C 切 $2x+y+5=0$ 於$(-2,-1)$，則圓 C 之圓心為______，又半徑為______。

答案：(2,1); $2\sqrt{5}$

解析：過$(-2,-1)$與 $2x+y+5=0$ 垂直之直線為 $x-2y=0$，

$\begin{cases}x+y=3\\x-2y=0\end{cases}$，$\therefore$圓心為(2,1)，半徑為 $\frac{|2\times2+1+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$

10、 有一圓 $C: 4x^2+4y^2-4x+4y+1=0$ 及圓 C 外一點 $P(1,1)$，則點 P 到圓 C 之切線段長為______。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：$C: 4x^2+4y^2-4x+4y+1=0\Rightarrow x^2+y^2-x+y+\frac{1}{4}=0$

切線段長 $\sqrt{(1)^2+(1)^2-(1)+(1)+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

11、設圓 $C: x^2+(y+2)^2=9$，若點 $P(2,2)$為圓外一點，點 $Q(0,-4)$為圓內一點且直線 $\overline{PQ}$ 交圓 C 於 A, B 兩點則(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}$______, (2) $\overline{QA}\times\overline{QB}=$______。

答案：(1)11　(2)5

解析：(1) $\because P$ 為圓外一點　$\therefore \overline{PA}\times\overline{PB}=P$ 到此圓之切線段長的平方 $=2^2+(2+2)^2-9=11$

(2) $\because Q$ 為圓內一點　$\therefore \overline{QA}\times\overline{QB}==|\overline{QC}^2-r^2|=|0^2+(-4+2)^2-9|=5$

12、與直線 $2x-y-3=0$ 相切而圓心為$(-1,0)$的圓方程式為______。

答案：$(x+1)^2+y^2=5$

解析：圓之半徑為$(-1,0)$到直線 $2x-y-3=0$ 之距離 $\frac{|-2-0-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，$\therefore$圓方程式 $(x+1)^2+y^2=5$

13、設 $A(-4, 4)$，圓 $C: x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 若通過 A 點對圓 C 作二切線得切點為 P, Q，則

(1) $\overline{AP}=$_________。　(2)△APQ 之外接圓方程式為__________________。

答案：(1) 5　(2)　$x^2+y^2+x-7y=0$

解析：(1) $\overline{AP}=\sqrt{16+16+24-24-7}=5$

(2)△APQ 之外接圓即以 $\overline{OA}$ 為直徑之圓，∴圓心 $O(3, 3)$

$\therefore (x-3)(x+4)+(y-3)(y-4)=0 \Rightarrow$ 圓為 $x^2+y^2+x-7y=0$

14、對任意實數 k，圓 $x^2+y^2+kx+ky-13-5k=0$ 恆通過兩定點，則此二定點坐標為________和___________；又對不同的 k 值，所產生之圓的圓心軌跡方程式為_____________。

答案：(2,3); (3,2);　$x-y=0$

解析：圓系：$(x^2+y^2-13)+k(x+y-5)=0$

$\begin{cases} x^2+y^2-13=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y)=(2,3)$ 或(3,2)⇒為二定點

因為圓心至兩點(2,3); (3,2)等距，故其圓心軌跡方程式為(2,3)與(3,2)之中垂線，即 $x-y=0$

15、直線 $x+2y=0$ 截圓 $(x-3)^2+(y-1)^2=16$ 於兩點 A, B，則線段 $\overline{AB}$ 之中點坐標為______。

答案：(2,–1)

解析：(3,1)對直線 $x+2y=0$ 之投影點為 $(3,1)-\dfrac{5}{\sqrt{5}}\times\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}=(2,-1)$

16、坐標平面上，圓 C: $x^2+y^2+4x+2y-20=0$，圓外一點 $P(2,-6)$，過 P 對圓 C 做切線，切點為 A, B，則過 P, A, B 三點的圓方程式為________。

答案：　$x^2+y^2+7y+2=0$

解析：圓 C: $x^2+y^2+4x+2y-20=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=25$　∴圓心為 $C(-2,-1)$，半徑為 5

過 P, A, B 三點的圓即以 $P(2,-6)$，$C(-2,-1)$ 為直徑的圓，

直徑式　$(x-2)(x+2)+(y+6)(y+1)=0 \Rightarrow x^2+y^2+7y+2=0$

17、過點(2,–5)的直線 L 交圓 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=10$ 於 P, Q 兩點且 $\overline{PQ}=2\sqrt{5}$，則直線 L 之斜率為______或______。

答案：-2; $\dfrac{11}{2}$

解析：設直線 PQ 為 $y+5=m(x-2) \Rightarrow mx-y-(2m+5)=0$，$\dfrac{|m-2-2m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

$\therefore 2m^2-7m-22=0$，$(m+2)(2m-11)=0$，　$\therefore m=-2$ 或 $\dfrac{11}{2}$

18、設圓心在 $x-2y+3=0$ 上且與兩坐標軸相切之圓方程式為______________________。

答案：$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

解析：設圓心 $O(2t-3, t)$，與兩坐標軸相切⇒$|2t-3|=|t| \Rightarrow 2t-3=\pm t$，

$\therefore t=3$ 或 1，故圓心(−1, 1)或(3, 3)

∴圓：$(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

19、設圓C_1 $: x^2+y^2=1$與圓C_2 $: x^2+y^2+2x+4y+1=0$相交於A, B兩點，則

(1)直線AB的方程式為______,

(2)圓C_3通過A, B兩點且通過點$D(3,0)$則圓C_3之方程式為______。

$\boxed{答案}$：(1) $x+2y+1=0$　(2) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$

$\boxed{解析}$：(1)直線AB的方程式為$(x^2+y^2+2x+4y+1)-(x^2+y^2-1)=0 \Rightarrow x+2y+1=0$

(2)設通過A, B兩點之圓C_3為$(x^2+y^2-1)+k(x+2y+1)=0$

此圓通過點$D(3,0)$代入上式，$\therefore k=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$圓$C_3$之方程式為$x^2+y^2-2x-4y-3=0$

20、二圓$C_1: x^2+y^2+2x=0$，$C_2:(x+3)^2+(y+4)^2=9$則

(1)二圓之外公切線段長為何？

(2)二圓之二條外公切線的交點為何？

(3)二圓之二條外公切線方程式為何？

(4)二條外公切線之交角為θ，則$\sin\theta=$？

$\boxed{答案}$：(1)4　(2)$(0,2)$　(3)　$y=\dfrac{3}{4}x+2$與$x=0$　(4)$\dfrac{4}{5}$

$\boxed{解析}$：(1)圓C_1圓心$(-1,0)$，半徑$r_1=1$，圓C_2:圓心$(-3,4)$，半徑$r_2=3$，又連心線長$2\sqrt{5}$

外公切線段長為$\sqrt{\overline{C_1C_2}^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{20-2^2}=4$

(2)二條外公切線的交點為$\left(\dfrac{3\times(-1)+(-1)\times(-3)}{3-1},\dfrac{3\times 0+(-1)\times(-4)}{3-1}\right)=(0,2)$

(3)設外公切線方程式為$y-2=m(x-0) \Rightarrow mx-y+2=0$

$\therefore \dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$　，$4m=3 \Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$，另一斜率不存在

$\therefore$二條外公切線為$y=\dfrac{3}{4}x+2$與$x=0$

(4)二外公切線之交角為θ，$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

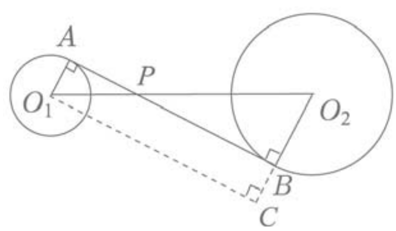
$\therefore \sin\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

21、設$C_1: x^2+y^2=1$，$C_2:(x-1)^2+(y-3)^2=4$

(1)求C_1與C_2的內公切線段長。

(2)求兩個內公切線的交點。

(3)求內公切線的方程式。



$\boxed{答案}$：(1) 1　(2) $(\dfrac{1}{3}, 1)$　(3)　$y=1$或$y=-\dfrac{3}{4}(x-\dfrac{1}{3})+1$

$\boxed{解析}$：(1)$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

內公切線長$\overline{AB}=\overline{O_1C}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_2C}^2}=\sqrt{10-(1+2)^2}=1$

(2)如圖：$\overline{O_1P}:\overline{O_2P}=\overline{O_1A}:\overline{O_2B}=1$：2

$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OO_2}=\frac{2}{3}(0,0)+\frac{1}{3}(1,3)=(\frac{1}{3},1)$ ，$\therefore P(\frac{1}{3},1)$

(3)設內公切線為 $L: y=m(x-\frac{1}{3})+1 \Rightarrow mx-y-\frac{1}{3}m+1=0$

$\because d(O_1, L)=1 \Rightarrow \frac{\left|-\frac{1}{3}m+1\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}m-1\right|=\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{9}m^2-\frac{2}{3}m+1=m^2+1 \Rightarrow \frac{8}{9}m^2+\frac{2}{3}m=0$ ，$\therefore m=0$ 或 $-\frac{3}{4}$

$\therefore$內公切線為 $y=1$ 或 $y=-\frac{3}{4}(x-\frac{1}{3})+1$