高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.01. 03					
範圍	3-1 圓(2)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 圓 $2x^2+2y^2-6x+2y-5=0$ 之中心及半徑為 (A)$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $\sqrt{5}$ (B)$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$; $\sqrt{5}$ (C)$(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $\sqrt{5}$ (D)$(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $\frac{5}{2}$ (E)$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$; $\frac{5}{2}$

解析：$2x^2+2y^2-6x+2y-5=0 \Rightarrow x^2+y^2-3x+y-\frac{5}{2}=0$

$\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}+\frac{9}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=5$，即圓心$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$; 半徑$\sqrt{5}$

2、(C) 在坐標平面上，下列哪一組恰可決定一個圓？

(A)過三點 $A(1,-4)$, $B(2,-2)$, $C(5, 4)$

(B)過四點 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$

(C)以 $P(3, 4)$, $Q(4, 3)$為一直徑的兩端點

(D)圓心為(4, 2)且與 x, y 軸均相切

(E)與三直線 $x-y=0$, $x+y=0$ 及 $y=2$ 均相切

解析：(A)（╳）：$\overrightarrow{AB}=(1,2)$; $\overrightarrow{AC}=(4,8) \Rightarrow \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，$\therefore A, B, C$ 三點共線。

(B)（╳）：令 $O(0, 0)$，$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OD}=1\neq\overline{OC}=\sqrt{2}$，$\therefore A, B, C, D$ 不共圓。

(C)（○）：圓心$(\frac{7}{2},\frac{7}{2})$，半徑$\frac{1}{2}\sqrt{(3-4)^2+(4-1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(D)（╳）：與 x 軸，y 軸均相切。若圓心(h, k)，則必$|h|=|k|$。

(E)（╳）：不只一個。

3、(CD)（複選）若方程式 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 之圖形表一圓，則m的範圍為 $\alpha<m<\beta$ 且當 $m=\gamma$ 時，此圓有最大半徑為δ，則

(A)$\alpha=-1$ (B)$\beta=3$ (C)$\gamma=-1$ (D)$\alpha+\beta+\gamma=-3$ (E)$\delta=4$

解析：$[x+(m-1)]^2+(y-m)^2=-3m^2+2+(m-1)^2+m^2=-m^2-2m+3=-(m+1)^2+4$

其圖形為圓$\Rightarrow -m^2-2m+3>0$，$m^2+2m-3<0 \Rightarrow (m+3)(m-1)<0 \Rightarrow -3<m<1$

$\therefore \alpha=-3, \beta=1,$

$\therefore r^2=-(m+1)^2+4\leq 4 \Rightarrow r\leq 2 \Rightarrow$ 當 $m=\gamma=-1$,圓有最大半徑$\delta=2$,

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3+1-1=-3$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 一動點 $P(x,y)$與二點(4,0), (0,2)的距離之平方和為 11，此動點之點集圖形為一圓，此圓之方程式為______。

答案：$2x^2+2y^2-8x-4y+9=0$

解析：$(\sqrt{(x-4)^2+y^2})^2+(\sqrt{x^2+(y-2)^2})^2=11 \Rightarrow 2x^2+2y^2-8x-4y+9=0$

2、 設 $P(x,y)$為圓 $O: x^2+y^2=1$上的任一點，則 $2x^2+2xy$ 的最大值為______，最小值為______。

答案：$\sqrt{2}+1$; $1-\sqrt{2}$

解析：設 $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$\therefore 2x^2+2xy=2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=1+\cos 2\theta+\sin 2\theta=1+\sqrt{2}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{4})$

$\therefore$最大值為 $\sqrt{2}+1$，最小值為 $1-\sqrt{2}$

3、 設點 $A(2,3)$為圓 O : $x^2+y^2=16$之內部一點，則過 A 點的所有弦中點所形成之點集圖形方程式為一圓方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則 $d=$______, $e=$______, $f=$______。

答案：-2; -3; 0

解析：過 A 點的所有弦中點所形成之點集圖形為圓，其$(0,0)$與$(2,3)$恰為此圓直徑之兩端點

$\therefore$圓方程式為 $(x-0)(x-2)+(y-0)(y-3)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-3y=0$，$d=-2,\ e=-3,\ f=0$

4、 設圓 C_1 : $x^2+y^2+4x+2y-8=0$與直線 $x+y=2$ 相交於 A, B 兩點，又圓 C 為通過 A, B 兩點，且與 x 軸相切之圓方程式，則圓 C 的方程式為______或______。

答案：$x^2+y^2-2y=0$; $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

解析：Sol 一：

$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y-8=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$\overline{AB}$之中垂線為 $y=x+1$，$\therefore$設圓心為 $(t,t+1)$，半徑為 $|t+1|$

$t^2+(t+1-2)^2=(t+1)^2 \quad \therefore t=0$ 或 4

$t=0$時，圓 C 為 $x^2+y^2-2y=0$

$t=4$時，圓 C 為 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

Sol 二：

圓系 $(x^2+y^2+4x+2y-8)+k(x+y-2)=0$

$y=0 \Rightarrow x^2+(k+4)x-2(k+4)=0$

與 x 軸相切 $\Rightarrow (k+4)^2-4\cdot[-2(k+4)]=0$

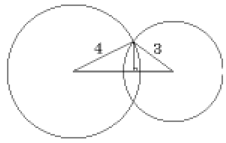
$\Rightarrow (k+4)[(k+4)+8]=0$

$\Rightarrow k=-4,-12$

圓 C 為 $x^2+y^2-2y=0$；$x^2+y^2-8x-10y+16=0$

5、 設二圓 $x^2+y^2-2x-8y+8=0$, $x^2-8x+y^2=0$ 的交點為 A, B，則 $\overline{AB}$ 的長度為______。

答案：$\dfrac{24}{5}$



解析：

$(x-1)^2+(y-4)^2=3^2$, $(x-4)^2+y^2=4^2$

連心線長 5，兩圓半徑分別為 3,4，為一直角三角形且 $\overline{AB}$ 為斜邊上高的兩倍

$\therefore \overline{AB}=2\times\dfrac{3\times 4}{5}=\dfrac{24}{5}$

6、 直線$3x+4y=0$截圓$(x+2)^2+(y-1)^2=9$於A, B兩點，則線段$\overline{AB}$之長爲______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{\sqrt{221}}{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：弦心距$\dfrac{|3\times(-2)+4\times 1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{2}{5}$，又半徑 3， $\overline{AB}=2(\sqrt{3^2-(\frac{2}{5})^2})=\dfrac{\sqrt{221}}{5}$

7、 一動點$P(x,y)$到點$(-1,0)$之距離與其到點$(3,0)$之距離比爲 1：3，此動點之點集圖形爲一圓，此圓之圓心爲______，半徑爲______。

$\boxed{\text{答案}}$：$(-\dfrac{3}{2},0)$; $\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：$P(x,y), A(-1,0), B(3,0)\Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP}=1:3$，即$3\overline{AP}=\overline{BP}\Rightarrow 3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\therefore 9[(x+1)^2+y^2]=(x-3)^2+y^2\Rightarrow 8x^2+8y^2+24x=0$

$\therefore x^2+y^2+3x=0$, $(x+\dfrac{3}{2})^2+y^2=(\dfrac{3}{2})^2$，圓心爲$(-\dfrac{3}{2},0)$　半徑$\dfrac{3}{2}$

8、 若P爲單位圓：$x^2+y^2=1$上的任一點，令O爲原點，$Q(3,-2)$，則$\triangle POQ$的最大面積爲________。

$\boxed{\text{答案}}$：令$P(\cos\theta, \sin\theta)$

$\therefore\triangle POQ$ 面積$=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\cos\theta & \sin\theta\\ 3 & -2\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|-2\cos\theta-3\sin\theta|=\dfrac{1}{2}|2\cos\theta+3\sin\theta|$

因爲$-\sqrt{13}\le 2\cos\theta+3\sin\theta\le\sqrt{13}$，$\therefore$最大面積爲$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$。

9、 圓C切y軸於$(0,-4)$且與x軸交於A, B兩點，若$\overline{AB}=6$，則圓C之圓方程式爲______或______。

$\boxed{\text{答案}}$：$(x-5)^2+(y+4)^2=25$; $(x+5)^2+(y+4)^2=25$

$\boxed{\text{解析}}$：設圓心爲$(h,-4)$，半徑爲$|h|$, $h^2=3^2+4^2$　$\therefore h=\pm 5$

$\therefore$圓方程式爲$(x-5)^2+(y+4)^2=25$或$(x+5)^2+(y+4)^2=25$

10、設$P(x,y)$爲圓$O: x^2+y^2=25$上之任一點，則

(1) $x+y-2$的最大值爲__________，最小值爲_________，

(2) $\dfrac{xy}{25}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{5}$之最大值爲_________，最小值爲_________，

(3) $4x^2+2y^2$之最大值爲___________，最小值爲__________，

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $5\sqrt{2}-2$; $-5\sqrt{2}-2$　(2) $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$; -1　(3)100, 50　(4) $66+20\sqrt{10}$; $66-20\sqrt{20}$

$\boxed{\text{解析}}$：設$x=5\cos\theta,\ y=5\sin\theta$

(1) $x+y-2=5\cos\theta+5\sin\theta-2=5\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})-2$，$\therefore$最大值$5\sqrt{2}-2$，最小值$-5\sqrt{2}-2$

(2) $\dfrac{xy}{25}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{5}=\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta=\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta$

設$\sin\theta+\cos\theta=t$，$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$，且$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

原式=$\dfrac{t^2-1}{2}+t=\dfrac{t^2+2t-1}{2}=\dfrac{(t+1)^2-2}{2}$；最小值$-1$，最大值$\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2-2}{2}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

(3) $4x^2+2y^2=4\times(25\cos^2\theta)+2\times(25\sin^2\theta)$

$=50(1+\cos2\theta)+25(1-\cos2\theta)=75+25\cos2\theta$

$-1\le\cos2\theta\le1$，　$\therefore 50\le 4x^2+2y^2\le100$

11、圓 C 以$(-2,1)$爲圓心與圓C_1 $:x^2+y^2-4x+4y+4=0$相切，則圓 C 之方程式爲______或______。

答案：$(x+2)^2+(y-1)^2=9$； $(x+2)^2+(y-1)^2=49$

解析：圓C_1 $:(x-2)^2+(y+2)^2=4$，連心線長 5

若圓 C 與圓C_1外切，圓 C 半徑爲$5-2=3$，得$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

若圓 C 與圓C_1內切，圓 C 半徑爲$5+2=7$，得$(x+2)^2+(y-1)^2=49$

12、坐標平面上兩點 $A(4,3)$, $B(-2,-1)$，若$\overline{AB}$爲圓 C 之一弦且弦心距爲$\sqrt{13}$，則此圓之圓心爲______或______。

答案：$(3,-2)$; $(-1,4)$

解析：$\overline{AB}$中點爲$(1,1)$, $\overrightarrow{AB}=(-6,-4)$；$(1,1)\pm\sqrt{13}\times\dfrac{(2,-3)}{\sqrt{13}}=$ $(3,-2)$或$(-1,4)$爲圓心

13、求過 $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(1,-1)$三點之圓的方程式爲________________。

答案：令圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，將$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1,-1)$代入

$$\therefore\begin{cases}4+2e+f=0\\2+d+e+f=0\\2+d-e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=2\\e=0\\f=-4\end{cases}\quad\therefore\text{圓：}x^2+y^2+2x-4=0$$

14、圓 C 以 $A(-1,2)$與 $B(3,5)$之線段爲直徑，則圓 C 之方程式爲______。

答案：$x^2+y^2-2x-7y+7=0$

解析：$(x+1)(x-3)+(y-2)(y-5)=0\Rightarrow x^2+y^2-2x-7y+7=0$

15、包含 $A(1,4)$, $B(4,1)$, $C(-2,3)$三點的圓區域有無限多個，其中半徑最小之圓方程式的圓心爲______，半徑爲______。

答案：$(1,2)$; $\sqrt{10}$

解析：$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{10}$, $\overline{CA}=\sqrt{10}$，$\overline{BC}$邊最長

$\triangle ABC$ 爲鈍角三角形，($\because \overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$)，包含三點之圓中半徑最小者並非$\triangle ABC$之外接圓，而是以$\overline{BC}$爲直徑的圓，$\therefore$圓心爲$(1,2)$，半徑$\sqrt{10}$

16、設 $P(x, y)$爲圓$C:(x+3)^2+(y+4)^2=9$上的任一點，O 爲原點，當$\overline{OP}$距離最小時

(1) (　　) 最小距離為 (A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 5　(E) 8

(2) (　　) 此時 P 點的 x 坐標為 (A) 0　(B) $-\frac{3}{5}$　(C) $-\frac{6}{5}$　(D) $-\frac{8}{5}$　(E) $-\frac{9}{5}$

答案：(1) (B)　(2) (C)

解析：　圓 C 之圓心為$(-3,-4)$，又 $\overline{OC}=5$，$\overline{OP}$ 最小距離為 $5-3=2$，

此時 P 點的 x 坐標 $(0,0)+2\times\frac{(-3,-4)}{5}=(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$

17、設 $A(-1,3)$, $B(-2,1)$為平面上兩定點，P 點在圓 $O: x^2+y^2=1$上，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值為______，最小值為______。

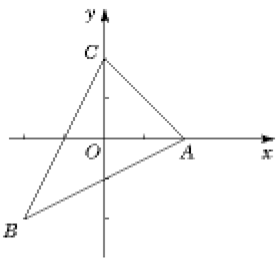
答案：11; 1

解析：設 $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-1-\cos\theta,3-\sin\theta)\cdot(-2-\cos\theta,1-\sin\theta)$$
$$=\cos^2\theta+3\cos\theta+2+\sin^2\theta-4\sin\theta+3$$
$$=3\cos\theta-4\sin\theta+6=5\cos(\theta+\phi)+6$$ ，最大值 11，最小值 1

18、△ABC 的三邊分別在三直線 $L_1=x+y=2$，$L_2: x-2y=2$，$L_3=2x-y+2=0$ 上，則

(1)△ABC 的外心坐標為何？(2)△ABC 的內心坐標為何？



答案：

(1) $\begin{cases}x+y=2\\x-2y=2\end{cases}\Rightarrow A(2,0)$,

$\begin{cases}x-2y=2\\2x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow B(-2,-2)$，

$\begin{cases}x+y=2\\2x-7+2=0\end{cases}\Rightarrow C(0,2)$

$\overline{AB}$ 中垂線 $2x+y=-1$，$\overline{AC}$ 之中垂線 $x=y$，其交點即為外心$(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

(2) $\angle A$ 之角平分線 $\frac{(x+y-2)}{\sqrt{2}}=+\frac{(x-2y-2)}{\sqrt{5}}$ (同號區)

$\Rightarrow(\sqrt{5}-\sqrt{2})x+(\sqrt{5}+2\sqrt{2})y-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}=0\cdots\cdots$①

$\angle B$ 角平分線 $\frac{2x-y+2}{\sqrt{5}}=-\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$　(異號區) $\Rightarrow x=y\cdots\cdots$②，

由①②交點內心$(\frac{14-3\sqrt{10}}{9},\frac{14-3\sqrt{10}}{9})$

19、若點 $P(x, y)$是單位圓上的點，求 $\sqrt{3}x+y$ 的最大值，此時 P 點坐標為何？

答案：單位圓方程式：$x^2+y^2=1$。

設 $P(x, y)$，其中$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$, $0\le\theta<2\pi$

則$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)=2(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta)=2\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$

當$\frac{\pi}{3}+\theta=\frac{\pi}{2}$時，$\sqrt{3}x+y$有最大值 2。此時$\theta=\frac{\pi}{6}$。故$P(x,y)=(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$。

20、設方程式$x^2+y^2+2(m+2)x-2(m-1)y+3m^2-3=0$為圓方程式，則 m 之範圍為何？欲使圓有最大的半徑，則$m=$？又半徑＝？

答案：$x^2+y^2+2(m+2)x-2(m-1)y+3m^2-3=0$

$(x+m+2)^2+(y-m+1)^2=3-3m^2+(m+2)^2+(m-1)^2=-m^2+2m+8$

$\therefore -m^2+2m+8>0\Rightarrow m^2-2m-8<0\Rightarrow (m-4)(m+2)<0\quad \therefore -2<m<4$

半徑為$\sqrt{-m^2+2m+8}=\sqrt{-(m-1)^2+9}\le 3$，$\therefore m=1$時此圓有最大的半徑，此半徑為 3

21、設圓 O: $x^2+y^2=4$，$\overline{AB}$為圓 O 之一弦且 $A(2,0), B(0,2)$，若點 C 為圓 O 上可使△ABC 面積最大的一點，則

(1) (　) △ABC 的面積為 (A)$2\sqrt{2}-2$ (B) 4 (C)$2+2\sqrt{2}$ (D) 8 (E)$4+4\sqrt{2}$

(2) (　) C 點坐標為 (A)$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (B)$(0,-2)$ (C)$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (D)$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ (E)$(-2,0)$

答案：(1) (C)　(2) (A)

解析：(2) 設 $C(2\cos\theta,2\sin\theta)$

△ABC 面積$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2\cos\theta-2 & 2\sin\theta\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|=\left|2\cos\theta-2+2\sin\theta\right|=\left|2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-2\right|\le 2\sqrt{2}+2$

此時$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow\theta=\frac{5\pi}{4}$，$\therefore C(2\cos\frac{5\pi}{4},2\sin\frac{5\pi}{4})\Rightarrow C(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$