| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.12. 27 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 3-1 圓 | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題 (每題 10 分)

1、( B ) 設二元二次方程式$ax^2+bxy-y^2+dx+ey+f=0$爲圓方程式，則下列何者非真？

(A)$a=-1$ (B)$d^2+e^2-4f>0$ (C)圓心$(\frac{d}{2},\frac{e}{2})$ (D)$b=0$ (E)此圓之半徑爲$\sqrt{f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}}$

解析：令$a=-1$，$b=0\Rightarrow -x^2-y^2+dx+ey+f=0\Rightarrow x^2+y^2-dx-ey-f=0$

$\Rightarrow (x-\frac{d}{2})^2+(y-\frac{e}{2})^2=f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}\Rightarrow$圓心$(\frac{d}{2},\frac{e}{2})$；半徑$\sqrt{f+\frac{d^2}{4}+\frac{e^2}{4}}$；$d^2+e^2+4f>0$

2、( AC ) (複選)設一圓通過$A(5, 1)$, $B(3,-1)$兩點且圓心在直線$x-2y+2=0$上，則此圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則（複選）

(A)$d=-4$ (B)$e=4$ (C)$f=-2$ (D)圓心坐標爲(2,–2) (E)半徑爲 10

解析：令圓心$O(2t-2, t)$，$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore (2t-2-5)^2+(t-1)^2=(2t-2-3)^2+(t+1)^2\Rightarrow t=2$

$\therefore$圓心$O(2, 2)$，半徑$r=\overline{OA}=\sqrt{10}$，$\therefore$圓：$(x-2)^2+(y-2)^2=10$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-2=0$，$\therefore d=-4, e=-4, f=-2$。

3、( CD ) (複選)若方程式$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$之圖形表一圓，則$m$的範圍爲$\alpha<m<\beta$且當$m=\gamma$時，此圓有最大半徑爲$\delta$，則（複選）

(A)$\alpha=-1$ (B)$\beta=3$ (C)$\gamma=-1$ (D)$\alpha+\beta+\gamma=-3$ (E)$\delta=4$

解析：$[x+(m-1)]^2+(y-m)^2=-3m^2+2+(m-1)^2+m^2=-m^2-2m+3=-(m+1)^2+4$

其圖形爲圓$\Rightarrow -m^2-2m+3>0$，$m^2+2m-3<0\Rightarrow (m+3)(m-1)<0\Rightarrow -3<m<1$

$\therefore \alpha=-3, \beta=1,$

$\therefore r^2=-(m+1)^2+4\le 4\Rightarrow r\le 2\Rightarrow$當$m=\gamma=-1$,圓有最大半徑$\delta=2$,

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3+1-1=-3$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 圓 $C$ 上有三點 $A(-1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,-1)$，則圓 $C$ 的方程式爲____________________。

答案：$x^2+y^2-5x-3y-4=0$

解析：令圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，將 $A(-1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,-1)$代入

$\therefore \begin{cases}1+1-d+e+f=0\\ 9+25+3d+5e+f=0\\ 25+1+5d+e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-5\\ e=-3\\ f=-4\end{cases}$，$\therefore$圓方程式爲$x^2+y^2-5x-3y-4=0$

2、 若二元二次方程式$4x^2+4y^2+4x-8y+1+k=0$之圖形爲一點，則$k=$______，又此點爲_________。

答案：4; $(-\frac{1}{2},1)$

解析：$4x^2+4y^2+4x-8y+1+k=0\Rightarrow x^2+y^2+x-2y+(\frac{1+k}{4})=0$

$1^2+(-2)^2-4(\frac{1+k}{4})=0\Rightarrow k=4$，此點為$(-\frac{1}{2},-\frac{-2}{2})=(-\frac{1}{2},1)$

3、 設方程式$ax^2+2y^2+4x-6y+k=0$為圓方程式，則$a=$______，又$k$之條件為 ______。

答案：2; $k<\frac{13}{2}$

解析：$a=2$，圓方程式$x^2+y^2+2x-3y+\frac{k}{2}=0\Rightarrow 2^2+(-3)^2-4(\frac{k}{2})>0$；$-2k+13>0$ $\therefore k<\frac{13}{2}$

4、 圓$C$切$y$軸於$(0,-4)$且與$x$軸交於$A, B$兩點，若$\overline{AB}=6$，則圓$C$之圓方程式為__________或_____________。

答案：$(x-5)^2+(y+4)^2=25$；$(x+5)^2+(y+4)^2=25$

解析：設圓心為$(h,-4)$，則半徑為$|h|$，$h^2=3^2+4^2$，$h=\pm 5$

$\therefore$圓方程式為$(x-5)^2+(y+4)^2=25$或$(x+5)^2+(y+4)^2=25$

5、 圓$C$以$A(-1,2)$與$B(3,5)$之線段為直徑，則圓$C$之方程式為__________________________。

答案：$x^2+y^2-2x-7y+7=0$

解析：$(x+1,y-2)\cdot(x-3,y-5)=0\Rightarrow(x+1)(x-3)+(y-2)(y-5)=0$，$\therefore x^2+y^2-2x-7y+7=0$

6、 包含$A(1,4)$, $B(4,1)$, $C(-2,3)$三點的圓區域有無限多個，其中半徑最小之圓方程式的圓心為__________，半徑為___________。

答案：(1,2); $\sqrt{10}$

解析：$\triangle ABC$中$\overline{AB}=3\sqrt{2}$，$\overline{BC}=2\sqrt{10}$，$\overline{CA}=\sqrt{10}$

$\therefore\triangle ABC$為鈍角三角形($\because \overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$)，$\overline{BC}$邊最長，

包含三點之圓中半徑最小者是以$\overline{BC}$為直徑的圓，$\therefore$圓心為(1,2)，半徑$\sqrt{10}$

7、 圓$C$以$(-2,1)$為圓心與圓$C_1$ $:x^2+y^2-4x+4y+4=0$相切，則圓$C$之方程式為____________或_________________。

答案：$(x+2)^2+(y-1)^2=9$；$(x+2)^2+(y-1)^2=49$

解析：圓$C_1$ $:(x-2)^2+(y+2)^2=4$，連心線長 5

若圓$C$與圓$C_1$外切，圓$C$半徑為$5-2=3$，得$(x+2)^2+(y-1)^2=9$

若圓$C$與圓$C_1$內切，圓$C$半徑為$5+2=7$，得$(x+2)^2+(y-1)^2=49$

8、 與二坐標軸均相切且過$(-2, 4)$之圓的方程式為________________________________。

答案：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$或$(x+10)^2+(y-10)^2=100$

解析：$\because$與兩坐標軸均相切，圓心必為$(t, t)$或$(t,-t)$，半徑$|t|$

①當圓心$(t, t)$時，$(t+2)^2+(t-4)^2=t^2\Rightarrow t^2-4t+20=0$（不合，$\delta<0$）

②當圓心$(t,-t)$時，$(t+2)^2+(-t-4)^2=t^2\Rightarrow t^2+12t+20=0$，$\therefore t=-2$或$-10$

$\therefore$圓：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$或$(x+10)^2+(y-10)^2=100$

9、 坐標平面上兩點 $A(4,3), B(-2,-1)$，若$\overline{AB}$為圓 $C$ 之一弦且弦心距為$\sqrt{13}$，則此圓之圓心為_________或__________。

答案：(3,–2); (–1,4)

解析：$\overline{AB}$中點為(1,1), $\overrightarrow{AB}=(-6,-4)=-2(3,2)$；圓心為$(1,1)\pm\sqrt{13}\times\dfrac{(2,-3)}{\sqrt{13}}=(3,-2)$或$(-1,4)$

10、圓 $O$ 通過兩點 $A(5,0), B(3,4)$，圓 $O$ 被 $y$ 軸所截出之弦長為$2\sqrt{6}$，則圓 $C$ 之圓心為________或____________。

答案：(2,1); (38,19)

解析：$\overline{AB}$之中垂線為$y-2=\dfrac{1}{2}(x-4)$ $\therefore x=2y$，設圓心為$(2t,t)$，圓心到 $y$ 軸之距離為$|2t|$

$\therefore (2t)^2+(\sqrt{6})^2=(2t-5)^2+t^2$ $\therefore t^2-20t+19=0$；$t=1$或 19 $\therefore$圓心為(2,1)或(38,19)

11、設方程式$x^2+y^2-2mx+2(m-2)y+4m^2-2=0$之圖形為一圓，若 $m=a$ 時，使圓之面積 $b$ 為最大，則數對$(a, b)=$______。

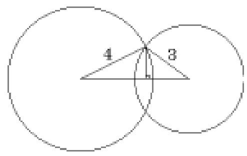
答案：$(-1, 8\pi)$

解析：此圓半徑$\dfrac{1}{2}\sqrt{(-2m)^2+[2(m-2)]^2-4(4m^2-2)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{-8(m+1)^2+32}$

當$m=a=-1$時，半徑$\dfrac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}$最大，圓之面積$b=\pi(2\sqrt{2})^2=8\pi$最大

12、設二圓$x^2+y^2-2x-8y+8=0$, $x^2-8x+y^2=0$的交點為 $A, B$，則$\overline{AB}$的長度為______。

答案：$\dfrac{24}{5}$




解析：

$(x-1)^2+(y-4)^2=3^2$, $(x-4)^2+y^2=4^2$

連心線長 5，兩圓半徑分別為 3,4，為一直角三角形且$\overline{AB}$為斜邊上高的兩倍

$\therefore \overline{AB}=2\times\dfrac{3\times4}{5}=\dfrac{24}{5}$

13、設點 $A(2,3)$為圓 $\mathrm{O}: x^2+y^2=16$之內部一點，則過 $A$ 點的所有弦中點所形成之點其圖形方程式為一圓方程式$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則$d=$______, $f=$______。

答案：–2; 0

解析：過 $A$ 點的所有弦中點所形成之點圖形為圓，且(0,0)與(2,3)為此圓直徑之兩端點

$\therefore$圓方程式為$(x-0)(x-2)+(y-0)(y-3)=0\Rightarrow x^2+y^2-2x-3y=0$，$d=-2, e=-3, f=0$

14、坐標平面上，圓 $C$ 過點 $A(1, 4)$與 $B(0, 3)$，圓心在 $x$ 軸上，則圓 $C$ 方程式為______。

答案：$(x-4)^2+y^2=25$

解析：設圓心 $C(t,0) \Rightarrow \overline{CA}=\overline{CB}$ ，$\therefore (t-1)^2+(0-4)^2=(t-0)^2+(0-3)^2$

$\therefore t=4 \Rightarrow$ 圓心爲(4,0)，半徑爲 $\overline{CA}=\sqrt{(4-1)^2+(0-4)^2}=5 \Rightarrow$ 圓 $C$ 方程式 $(x-4)^2+y^2=25$

15、設圓 $C_1$ $: x^2+y^2+4x+2y-8=0$ 與直線 $x+y=2$ 相交於 $A, B$ 兩點，又圓 $C$ 爲通過 $A, B$ 兩點，且與 $x$ 軸相切之圓方程式，則圓 $C$ 的方程式爲________________或__________________。

答案：$x^2+y^2-2y=0$；$x^2+y^2-8x-10y+16=0$

解析：圓系 $x^2+y^2+4x+2y-8+k(x+y-2)=0$

與 $x$ 軸相切 $y=0 \Rightarrow x^2+(k+4)x-(2k+8)=0$ 恰有一解

$\delta=(k+4)^2+4\times1\times(2k+8)=0 \Rightarrow k^2+16k+48=0 \Rightarrow (k+4)(k+12)=0 \quad ;k=-4,-12$

圓 $C$ 爲 $x^2+y^2-2y=0, \quad x^2+y^2-8x-10y+16=0$

16、一圓通過 $A(3, 2)$ 與 $B(-1,4)$ 兩點並且圓心在直線 $2x+y+3=0$ 上，則此圓的圓心爲______，半徑爲______。

答案：$(-1,-1)$; 5

解析：設圓心 $C(t,-3-2t) \Rightarrow \overline{CA}=\overline{CB}$ ，$\therefore (t-3)^2+(-3-2t-2)^2=(t+1)^2+(-3-2t-4)^2$

$\therefore t=-1 \Rightarrow$ 圓心爲(−1,−1)，半徑爲 $\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-2)^2}=5$

17、一動點 $P(x,y)$ 到點(−1,0)之距離與其到點(3,0)之距離比爲 1：3，此動點之點集圖形爲一圓，此圓之圓心爲__________，半徑爲________。

答案：$(-\frac{3}{2},0)$; $\frac{3}{2}$

解析：設 $A(-1,0), B(3,3)$ ，題意

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:3 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-3)^2+y^2}=1:3 \Rightarrow 3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\Rightarrow 9[(x+1)^2+y^2]=(x-3)^2+y^2 \Rightarrow 8x^2+8y^2+24x=0$

$\therefore x^2+y^2+3x=0$，$(x+\frac{3}{2})^2+y^2=(\frac{3}{2})^2$ ，圓心爲 $(-\frac{3}{2},0)$ 　半徑 $\frac{3}{2}$

18、直線 $3x+4y=0$ 截圓 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ 於 $A, B$ 兩點，則線段 $\overline{AB}$ 之長爲______。

答案：$\frac{\sqrt{221}}{5}$

解析：弦心距 $\frac{|3\times(-2)+4\times1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$ ，又半徑 3， $\overline{AB}=2(\sqrt{3^2-(\frac{2}{5})^2})=\frac{\sqrt{221}}{5}$

19、有一圓的圓心爲(−1, −2)並且通過點(−2, 2)，求其方程式______________。

答案：$(x+1)^2+(y+2)^2=17$

解析：由兩點距離公式知，圓的半徑 $r=\sqrt{(-2+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$

故圓的方程式爲 $(x+1)^2+(y+2)^2=17$