高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.12.20					
範圍	2-6、3-1 一次方程組、行列式(2)、圓	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 設方程組 $\begin{cases} 6x+(a-2)y-7a+17=0 \\ (a+5)x-2y+8a+24=0 \end{cases}$ 無限多解，則 $a=$？

(A) -2 (B) -1 (C)0 (D)1 (E)2

解析：∵方程組無限無解，∴ $\dfrac{6}{a+5}=\dfrac{a-2}{-2}=\dfrac{-7a+17}{8a+24}$

$\therefore a^2+3a-10=-12 \Rightarrow a^2+3a+2=0$，$\therefore a=-2$ 或-1（-2 代入不合，$\because \dfrac{6}{4}=\dfrac{-3}{-2}\neq\dfrac{24}{16}$）

二、填充題 (每題 10 分)

1、 設 x, y, z 滿足 $3x+y-z=3,\ x-y+2z+4=0$，則 $x^2+2y-2z$ 之最小值爲__________；此時 $(x, y, z)=$__________。

答案：-3；$(3,-19,-13)$

解析：$\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ x-y+2z+4=0 \end{cases}$ $\therefore x=t,\ y=2-7t,\ z=-1-4t$

$\therefore x^2+2y-2z=t^2-6t+6=(t-3)^2-3\geq-3$，∴最小值 -3，此時 $\begin{cases} x=3 \\ y=-19 \\ z=-13 \end{cases}$

2、 若 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=2$，$\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}=-1$，則 $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c-3e & d-3f \end{vmatrix}=$_______。

答案：10

解析：$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c-3e & d-3f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -3e & -3f \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+(-6)\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}=2\times2-6\times(-1)=10$

3、 解方程組 $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \end{cases}$，則 $(x, y, z)=$____________。

答案：$(\dfrac{1}{2}, -1, 1)$

解析：設 $A=\dfrac{1}{x},\ B=\dfrac{1}{y},\ C=\dfrac{1}{z}$

原式 $\Rightarrow \begin{cases} 3A+B-2C=3 \\ 2A+3B+C=2 \\ A-B+C=4 \end{cases} \Rightarrow A=2,\ B=-1,\ C=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2},\ y=-1,\ z=1$

4、 已知方程組$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$的解爲$x=3,\ y=4$，則方程組$\begin{cases} 2bx-ay=-3c \\ 2ex-dy=-3f \end{cases}$的解爲$(x,y)=$________。

答案：$-6; 9$

解析：$\begin{cases} 2bx-ay=3c \\ 2ex-dy=3f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b(-\frac{x}{3})+a(\frac{y}{3})=c \\ 2e(-\frac{x}{3})+d(\frac{y}{3})=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(\frac{y}{3})+b(-\frac{2x}{3})=c \\ d(\frac{y}{3})+e(-\frac{2x}{3})=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{3}=3 \\ -\frac{2x}{3}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=9 \end{cases}$

5、 解$\begin{cases} \dfrac{x+4y}{xy}=6 \\ \dfrac{2x+3y}{xy}=7 \end{cases}$，則$(x,y)=$__________。

答案：$(1,\frac{1}{2})$

解析：

因爲$xy\neq 0 \Rightarrow x\neq 0,\ y\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{4}{x}=6 \\ \frac{2}{y}+\frac{3}{x}=7 \end{cases}$ $\therefore x=1,\ y=\frac{1}{2}$

6、 下列圖形代表空間上三個平面相交的情形：

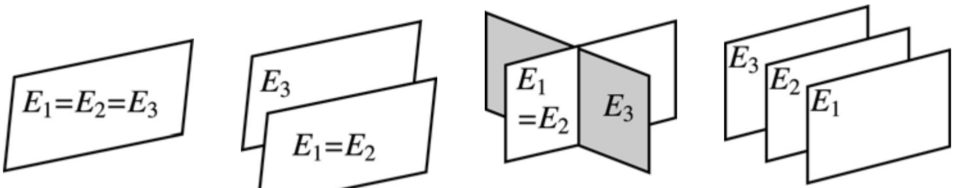

圖1 圖2 圖3 圖4

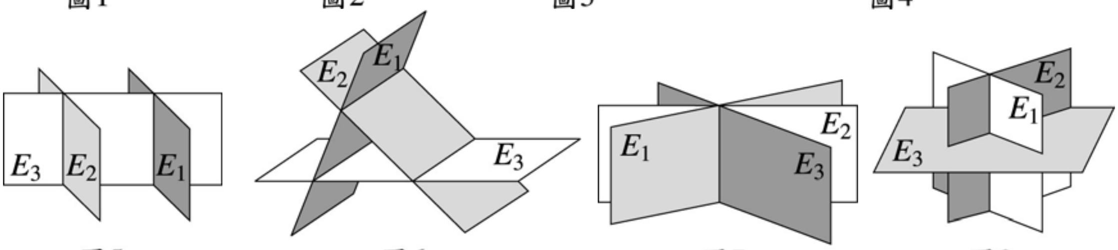

圖5 圖6 圖7 圖8

判斷下列各方程組相交之情形（在空格內，填入適當的圖號）

(1)$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ 2x+y+\ \ z=3 \\ 4x+y+3z=2 \end{cases}$，圖______。 (2)$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+3z=3 \end{cases}$，圖______。

答案：6 ; 7

解析：

(1)解聯立$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ 2x+y+\ \ z=3 \\ 4x+y+3z=2 \end{cases}$，前 2 式相減、後 2 式相減$\Rightarrow \begin{cases} x+z=-2 \\ -2x-2z=1 \end{cases}$，方程組無解，三平面兩兩相交於一線，且三交線平行不相交，選圖 6。

(2)解聯立 $\begin{cases} x+2y+z=1 \text{..........①} \\ 2x-y+2z=2 \text{........②} \\ 3x+y+3z=3 \text{........③} \end{cases}$ ①+②×2；②+③⇒ $\begin{cases} x+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$，有無限多解，

三平面相交於一直線，∴選圖 7。

7、 若兩方程組 $\begin{cases} x+2y-z=-8 \\ ax+y+z=5 \\ 2x-y+z=11 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+by-z=1 \\ x-2y+3z=12 \\ 2x+y-cz=15 \end{cases}$ 有相同解，求數對 $(a,b,c)=$________。

答案：(4,1,15)

解析：

$$\begin{cases} x+2y-z=-8 \\ x-2y+3z=12 \\ 2x-y+z=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-6 \\ z=-1 \end{cases} \text{代入} \Rightarrow \begin{cases} 6-6b+1=1 \\ 3a-6-1=5 \\ 6-6+c=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ c=15 \end{cases}, \quad \therefore (a,b,c)=(4,1,15)$$

8、兩根圓木分別長 10 公尺、8 公尺先後流經橋下，由開始流入到完全流出分別需要 13 秒及 11 秒，則橋的寬度爲_______公尺，又水流速度爲每秒_______公尺。

答案：3; 1

解析：設橋寬 x 公尺，水流速度每秒 y 公尺

$\begin{cases} x+10=13y \\ x+8=11y \end{cases}$，$\therefore x=3, \ y=1$，橋寬 3 公尺，水流速度每秒 1 公尺

9、 設 $\begin{cases} 3x+4y=r \\ 2x+3y=s \end{cases}$ 解 x,y 可得 $\begin{cases} x=ar+bs \\ y=cr+ds \end{cases}$，則 $(b,c)=$_________。

答案：$(-4,-2)$

解析：$\begin{cases} 3x+4y=r \cdots ① \\ 2x+3y=s \cdots ② \end{cases}$，① x3 − ② x 4; ① x2 − ② x 3 ⇒ $\begin{cases} x=3r-4s \\ y=-2r+3s \end{cases}$，$\therefore b=-4, \ c=-2$

10、若 $xyz\neq 0$ 且滿足 $\begin{cases} x+3y+5z=0 \\ 2x+4y+7z=0 \end{cases}$，求(1) $x:y:z=$___________ (2) $\dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+4z^2}=$______。

答案：$\dfrac{8}{9}$

解析：$x:y:z=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1:3:(-2)$

設 $x=t, \ y=3t, \ z=-2t$，$\dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+4z^2}=\dfrac{t^2+27t^2+20t^2}{2t^2+36t^2+16t^2}=\dfrac{48}{54}=\dfrac{8}{9}$

11、甲乙丙三人合作一工程，甲乙二人合作 20 天完工，乙丙二人合作 10 天完工，而甲丙二人合作 12 天完工，則甲獨作_____日可完工，乙獨作_____日可完工，丙獨作_____日可完工。

答案：60; 30;15

解析：設甲獨作 x 天可完工，乙獨作 y 天可完工，丙獨作 z 天可完工

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{12}\end{cases}\quad \therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{60},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{30},\ \frac{1}{z}=\frac{1}{15}\text{；}\therefore x=60,\ y=30,\ z=15$$

甲獨作 60 天可完工，乙獨作 30 天可完工，丙獨作 15 天可完工

12、空間中相異四點爲 $A(0,1,1), B(2,1,4), C(-3,2,1), D(0,2,2)$，則

(1)$\triangle ABC$ 的面積爲________，(2)四面體 $ABCD$ 的體積爲_________。

答案：(1)$\dfrac{\sqrt{94}}{2}$ (2)$\dfrac{7}{6}$

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(2,0,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,-9,2)$ $\therefore\triangle ABC$ 面積爲$=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+81+4}=\dfrac{\sqrt{94}}{2}$

(2)四面體 $ABCD=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&0&3\\-3&1&0\\0&1&1\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{6}\left|(-3,-9,2)\cdot(0,1,1)\right|=\dfrac{7}{6}$

13、設方程組$\begin{cases}(a-1)x+ay=a+2\\4x+(a+3)y=10\end{cases}$，則

(1)當 $a\neq$________時，方程組恰有一組解，且此解$(x,y)=$__________。

(2)當 $a=$________時，方程組有無限多組解。

(3)當 $a=$________時，方程組無解。

答案：(1) $3,-1$；$(\dfrac{a-2}{a+1},\dfrac{6}{a+1})$(2)3; (3)-1

解析：$\Delta=\begin{vmatrix}a-1&a\\4&a+3\end{vmatrix}=(a-1)(a+3)-4a=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}a+2&a\\10&a+3\end{vmatrix}=(a+2)(a+3)-10a=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}a-1&a+2\\4&10\end{vmatrix}=10(a-1)-4(a+2)=6(a-3)$

方程組解爲 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}a+2&a\\10&a+3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a-1&a\\4&a+3\end{vmatrix}}=\dfrac{(a-2)(a-3)}{(a-3)(a+1)}=\dfrac{a-2}{a+1}$，

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a-1&a+2\\4&10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a-1&a\\4&a+3\end{vmatrix}}=\frac{6(a-3)}{(a-3)(a+1)}=\frac{6}{a+1}$$

(2)當 $a=3$ 時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，有無限多組解，$2x+3y=5 \Rightarrow \begin{cases} x=1+3t \\ y=1-2t \end{cases}, t\in R$

(3)當 $a=-1$ 時，$\Delta=0, but\ \Delta_x\neq 0, \Delta_y\neq 0$，無解

14、 求圓心為(2, –1)，半徑為 5 的圓之方程式。

答案：$x^2+y^2-4x+2y-20=0$

解析：此圓之方程式為 $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$，即 $x^2+y^2-4x+2y-20=0$

15、 有一圓的圓心為(–1, –2)並且通過點(–2, 2)，求其方程式。

答案：$(x+1)^2+(y+2)^2=17$

解析：由兩點距離公式知，圓的半徑 $r=\sqrt{(-2+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$

故圓的方程式為 $(x+1)^2+(y+2)^2=17$

16、 求過 $A(0, 2), B(1, 1), C(1,-1)$三點之圓的方程式為________________。

答案：$x^2+y^2+2x-4=0$

解析：設圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，將(0, 2), (1, 1), (1,–1)代入

$$\therefore \begin{cases} 4+2e+f=0 \\ 2+d+e+f=0 \\ 2+d-e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ e=0 \\ f=-4 \end{cases} \quad \therefore \text{圓：} x^2+y^2+2x-4=0$$

17、 圓 C 以 $A(-1,2)$與 $B(3,5)$之線段為直徑，則圓 C 之方程式為______。

答案：$x^2+y^2-2x-7y+7=0$

解析：$(x+1)(x-3)+(y-2)(y-5)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-7y+7=0$

18、 求圓 $2x^2+2y^2-4x+8y+1=0$ 圓心坐標為_______；圓面積為_______。

答案：(1,–2)，$\dfrac{9\pi}{2}$

解析：圓：$x^2+y^2-2x+4y=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{9}{2}$

$\therefore$圓心坐標為(1,–2)，圓面積 $=\pi r^2=\pi\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{9\pi}{2}$。