高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.12.13					
範圍	2-6 一次方程組、行列式	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 若 $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}+1=0 \\ ax+by-4=0 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}-4=0 \\ 3ax-4by-26=0 \end{cases}$ 有相同的解，則 $2a+b=$？

(A)0 (B)10 (C)20 (D)40 (E)80

解析：$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}=-1 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} ax+by-4=0 \\ 3ax-4by-26=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-\dfrac{1}{2}b=4 \\ 6a+2b=26 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a-b=8 \\ 3a+b=13 \end{cases}$, $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$，$\therefore 2a+b=2\times 3+4=10$

2、(B) 下列那一組方程組有無限多組解？ (A) $\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x+6y=6 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x+12y+6=0 \\ 4x+16y=-8 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2x+3=4y \\ 4x+6=5y \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 5y=7 \\ 5x=7 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+4x=6 \end{cases}$

解析：

(A) $\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x+6y=6 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-2}{6}$；恰有一解

(B) $\begin{cases} 3x+12y+6=0 \\ 4x+16y=-8 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3}{4}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{-6}{-8}$；有無限多組解

(C) $\begin{cases} 2x-4y+3=0 \\ 4x-5y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{4} \neq \dfrac{-4}{-5}$；恰有一解

(D) $\begin{cases} 5y=7 \\ 5x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{5} \\ y=\dfrac{7}{5} \end{cases}$，恰有一解

(E) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+2y=6 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{2}{2}$，恰有一解

3、(B) 下列那一組方程組無解？ (A) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x+3=5y \\ 4x+5=10y \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 3x=5 \\ 10x=\dfrac{50}{3} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} 3x-15y=0 \\ 2x-10y=0 \end{cases}$

解析：

(A) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{2} \neq \dfrac{1}{-1}$，恰有一解

(B) $\begin{cases}2x-5y+3=0\\4x-10y+5=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{2}{4}=\dfrac{-5}{-10}\neq\dfrac{3}{5}$ ；無解

(C) $\begin{cases}3x=5\\10x=\dfrac{50}{3}\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{5}{3},y\in R$ ；無限多組解

(D) $\begin{cases}2x+y=5\\4x+2y=10\end{cases}\Rightarrow\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{10}$ ；無限多組解

(E) $\begin{cases}3x-15y=0\\2x-10y=0\end{cases}\Rightarrow x-5y=0$表一直線；無限多組解

4、(D) 下列何者恆爲真？ (A) $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix}a&a-c\\b&b-d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix}3a&c\\3b&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix}a&3a+c\\b&3b+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix}-2a&-2c\\-2b&-2d\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$

解析：

(A) $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}$ (行列互換⇒兩列互換)

(B) $\begin{vmatrix}a&a-c\\b&b-d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&-c\\b&-d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$ [第 1 行×(-1)加至第二行⇒提出負號]

(C) $\begin{vmatrix}3a&c\\3b&d\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$ [提出 3]

(D) $\begin{vmatrix}a&3a+c\\b&3b+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$ [第 1 行×(-3)加至第二行]

(E) $\begin{vmatrix}-2a&-2c\\-2b&-2d\end{vmatrix}=(-2)\times(-2)\times\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}$ [第 1 行、第二行提出(-2)]

5、(C) 設$\dfrac{x+y}{x}=5,\ \dfrac{y+z}{y}=\dfrac{3}{2}$，則$\dfrac{x+z}{z}=$ (A)$\dfrac{1}{2}$ (B)1 (C)$\dfrac{3}{2}$ (D)$\dfrac{13}{2}$ (E)$\dfrac{15}{2}$

解析：$\dfrac{x+y}{x}=5\Rightarrow\dfrac{x}{x}+\dfrac{y}{x}=5\Rightarrow1+\dfrac{y}{x}=5\Rightarrow\dfrac{y}{x}=4,$

$\dfrac{y+z}{y}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow1+\dfrac{z}{y}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{z}{y}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\dfrac{x}{z}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{1}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\dfrac{x+z}{z}=1+\dfrac{x}{z}=\dfrac{3}{2}$

6、(A) 設方程組$\begin{cases}6x+(a-2)y-7a+17=0\\(a+5)x-2y+8a+24=0\end{cases}$無解，則$a=$？

(A)–2 (B)–1 (C)0 (D)1 (E)2

解析：∵方程組無解，$\therefore\dfrac{6}{a+5}=\dfrac{a-2}{-2}\neq\dfrac{-7a+17}{8a+24}$

$\therefore a^2+3a-10=-12\Rightarrow a^2+3a+2=0$，$\therefore a=-2$或–1（–1 代入不合，$\because\dfrac{6}{4}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{24}{16}$）

7、($\overset{\text{BC}}{\text{E}}$)（複選）甲、乙二人同解$\begin{cases}2x+ay=7\\bx+4y=5\end{cases}$，其中甲看錯$a$，解得$x=-1,\ y=2$；乙看錯$b$，解得$x=2,\ y=-3$，則

(A) $a=\dfrac{9}{2}$　(B) $a=-1$　(C) $b=3$　(D) $b=\dfrac{27}{2}$　(E)正解$x=3,\ y=-1$

$\boxed{\text{解析}}$：看錯 a，代入第二式，$\therefore -b+8=5 \Rightarrow b=3$

看錯 b，代入第一式，$\therefore 4-3a=7 \Rightarrow a=-1$

$\therefore$正確方程式$\begin{cases}2x-y=7\\3x+4y=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

8、($\overset{\text{CD}}{\text{E}}$)（複選）設某三元一次方程組之增廣矩陣經列運算簡化成$\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，且未知數依序以$x, y, z$表之，則下列那些正確？

(A)原方程組無解　(B)原方程組恰有一解　(C)解在空間中表一直線

(D)$(-1, 2, 1)$為其中一解　(E)$(8,-16, 10)$為其中一解

$\boxed{\text{解析}}$：矩陣對應方程組為$\begin{cases}x-z=-2\\y+2z=4\end{cases}$，令$z=t$，得$x=-2+t$, $y=4-2t$，故在空間中表一直線。當$t=1,\ x=-1,\ y=2;\ t=10,\ x=8,\ y=-16$，$\therefore(-1, 2, 1)$與$(8,-16, 10)$皆為其解。

9、(BC)　若$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&1&-4&6\\1&2&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\end{bmatrix}$，則下列何者正確？（複選）

(A) $a=-13$　(B) $b=-8$　(C) $c=3$　(D) $c=-3$　(E) $a+b+c=-8$

$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&1&-4&6\\1&2&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-6&6\\0&0&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3&4\\0&-3&-6&6\\0&0&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&13\\0&-3&0&24\\0&0&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&13\\0&1&0&-8\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，

$\therefore a=13,\ b=-8,\ c=3$,　$\therefore a+b+c=13-8+3=8$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 若$\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=5$，則(1)$\begin{vmatrix}a+b&c+d\\a-b&c-d\end{vmatrix}=$______，(2)$\begin{vmatrix}2a-b&3a+2b\\2c-d&3c+2d\end{vmatrix}=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)–10　(2)35

$\boxed{\text{解析}}$：(1)$\begin{vmatrix}a+b&c+d\\a-b&c-d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&2c\\a-b&c-d\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&c\\a-b&c-d\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&c\\-b&-d\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=-10$

(2)$\begin{vmatrix}2a-b&3a+2b\\2c-d&3c+2d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a-b&7a\\2c-d&7c\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}2a-b&a\\2c-d&c\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}-b&a\\-d&c\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=35$

2、 解方程組$\begin{cases}\dfrac{4}{2x+5y+1}+\dfrac{3}{x+y+1}=1\\[2ex]\dfrac{6}{2x+5y+1}+\dfrac{4}{x+y+1}=1\end{cases}$，則$2x+5y+1=$________，又$y=$________。

答案：$-2; -1$

解析：設 $\dfrac{1}{2x+5y+1}=A, \dfrac{1}{x+y+1}=B \Rightarrow \begin{cases}4A+3B=1\\6A+4B=1\end{cases}\ A=-\dfrac{1}{2},\ B=1$

$\Rightarrow 2x+5y+1=-2,\ x+y+1=1 \Rightarrow$，$x=1,\ y=-1$

3、 根據調查，在華人社會，身高 H 公尺，體重 W 公斤的人中，其平均體表面積 S 平方公尺，可以用數學模型 $S=aH+bW-0.01$ 來表示，這裡的 a, b 是常數。又知體重一樣，身高多 5 公分，平均體表面積會增加 0.03 平方公尺；而身高一樣，體重多 4 公斤，平均體表面積會增加 0.05 平方公尺。根據模型，身高 170 公分，體重 64 公斤，應該有 ______ 平方公尺的平均體表面積。

答案：1.81

解析：$\begin{cases}S_1=aH+bW-0.01\\S_1+0.03=a(H+0.05)+bW-0.01\end{cases} \Rightarrow 0.05a=0.03 \therefore a=0.6$

同理 $\begin{cases}S_2=aH+bW-0.01\\S_2+0.05=aH+b(W+4)-0.01\end{cases} \Rightarrow 0.05=4b \therefore b=0.0125$

所求 $=0.6\times1.7+0.0125\times64-0.01=1.81$

4、 設 x, y, z 滿足 $3x+y-z=3,\ x-y+2z+4=0$，則 $z^2-2x+2y$ 之最小值爲_____；此時 $x=$_____。

答案：$4;\ \dfrac{1}{4}$

解析：$\begin{cases}3x+y-z=3\\x-y+2z+4=0\end{cases} \quad \therefore x=t,\ y=2-7t,\ z=-1-4t$

$\therefore z^2-2x+2y=16t^2-8t+5=16(t-\dfrac{1}{4})^2+4\geq 4$，$\therefore$最小值 4，此時 $x=t=\dfrac{1}{4}$

5、三年一班男女同學共有 48 人，男生的平均分數是 76 分，女生的平均分數是 82 分，又全班平均分數是 81 分，則班上男生有________人，女生有________人。

答案：8; 40

解析：設男生 x 人，女生 y 人

$\begin{cases}x+y=48\\76x+82y=81(x+y)\end{cases}$，$\therefore x=8,\ y=40$ 即男生 8 人，女生 40 人

6、 設△ABC 的三頂點爲 $A(4,1), B(2,7), C(-1,2)$，則△ABC 的面積爲______。

答案：14

解析：$\overrightarrow{AB}=(-2,6)$，$\overrightarrow{AC}=(-5,1) \quad \therefore \triangle=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}-2 & 6\\-5 & 1\end{vmatrix}\right\|=14$

7、 若 $\begin{vmatrix}a & c\\b & d\end{vmatrix}=2$，$\begin{vmatrix}a & e\\b & f\end{vmatrix}=-1$，則 $\begin{vmatrix}2a & 2b\\c-2e & d-2f\end{vmatrix}=$______。

答案：8

解析：$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c-2e & d-2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -2e & -2f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 2\times 2-4\times(-1)=8$

8、 解方程組$\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \end{cases}$，則 $x=$_______, $y=$_______, $z=$_______。

答案：$\dfrac{1}{2}; -1; 1$

解析：設 $A=\dfrac{1}{x},\ B=\dfrac{1}{y},\ C=\dfrac{1}{z}$

原式$\Rightarrow \begin{cases} 3A+B-2C=3 \\ 2A+3B+C=2 \\ A-B+C=4 \end{cases} \Rightarrow A=2,\ B=-1,\ C=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2},\ y=-1,\ z=1$

9、 求行列式之值$\begin{vmatrix} 3+5\sqrt[3]{2} & 1+10\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}=$______，

答案：$6\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$

解析：$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \sqrt[3]{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 6\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$

10、甲乙兩螞蟻分別沿著空間中不共平面的兩直線 $L_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$，和 $L_2: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ 移動，問(1)當兩螞蟻有最短距離時，甲螞蟻所在位置的坐標爲何？

(2)而兩螞蟻之最短距離爲何？

答案：(1) (1, 2 , 3) (2) $\sqrt{5}$

解析：利用 (兩歪斜線間距離求法)

11、有一個三位整數，其百位數字與個位數字之和比十位數字大 1，若將原數的百位數字與個位數字交換所得之三位數較原數小 297，若將原數的十位數字與個位數字交換所得的三位數較原數小 36，則原數爲________。

答案：562

解析：設百位數字 x，十位數字 y，個位數字 z

$\begin{cases} x+z=y+1 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-297 \\ 100x+10z+y=100x+10y+z-36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ x-z=3 \\ y-z=4 \end{cases}$；$x=5$，$y=6$，$z=2$；原數爲 562

12、已知方程組$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$的解爲$x=3,\ y=4$，則方程組$\begin{cases} 2bx-ay=3c \\ 2ex-dy=3f \end{cases}$的解爲$x=$____，$y=$____。

$\boxed{\text{答案}}$：6; –9

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\begin{cases} 2bx-ay=3c \\ 2ex-dy=3f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b(\frac{x}{3})+a(-\frac{y}{3})=c \\ 2e(\frac{x}{3})+d(-\frac{y}{3})=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(-\frac{y}{3})+b(\frac{2x}{3})=c \\ d(-\frac{y}{3})+e(\frac{2x}{3})=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{y}{3}=3 \\ \frac{2x}{3}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-9 \end{cases}$$

13、若方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$恰有一組解$x=3,\ y=-1,\ z=6$，則方程組

$\begin{cases} (a_1+b_1+c_1)x+(a_1-b_1)y+c_1z=d_1 \\ (a_2+b_2+c_2)x+(a_2-b_2)y+c_2z=d_2 \\ (a_3+b_3+c_3)x+(a_3-b_3)y+c_3z=d_3 \end{cases}$的解爲$x=$______，$y=$______，$z=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：–1; –2; –5

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\begin{cases} a_1(-x-y)+b_1(-x+y)+c_1(-x-z)+d_1=0 \\ a_2(-x-y)+b_2(-x+y)+c_2(-x-z)+d_2=0 \\ a_3(-x-y)+b_3(-x+y)+c_3(-x-z)+d_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=3 \\ -x+y=-1 \\ -x-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-5 \end{cases}$$

14、設方程組$\begin{cases} (k+2)x+2y=5 \\ x+(k+3)y=7 \end{cases}$恰有一組解，則$k\neq$______，且$k\neq$______。

$\boxed{\text{答案}}$：–1; –4

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\begin{vmatrix} k+2 & 2 \\ 1 & k+3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (k+2)(k+3)-2\neq 0 \quad \therefore (k+1)(k+4)\neq 0 \quad \therefore k\neq -1 \text{ 且 } k\neq -4$$

15、濃度 4%的鹽水 x cc 與濃度 7%的鹽水 y cc，混合成爲濃度 5%的鹽水 720 cc，則$x=$____，$y=$____。

$\boxed{\text{答案}}$：480; 240

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\begin{cases} x+y=720 \\ \frac{4}{100}x+\frac{7}{100}y=\frac{5}{100}\times 720 \end{cases} \qquad \therefore x=480,\ y=240$$

16、解$\begin{cases} x+4y=6xy \\ 2x+3y=7xy \end{cases}$，則$(x,y)=$________或________。

$\boxed{\text{答案}}$：(0,0); $(1,\frac{1}{2})$

解析：

(1)若 $xy=0\Rightarrow x=0$，$y=0$ 爲一組解

(2)若 $xy\neq 0\Rightarrow x\neq 0,\ y\neq 0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{x}=6\\[2mm]\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{x}=7\end{cases}$ $\therefore x=1,\ y=\dfrac{1}{2}$

17、下列圖形代表空間上三個平面相交的情形：

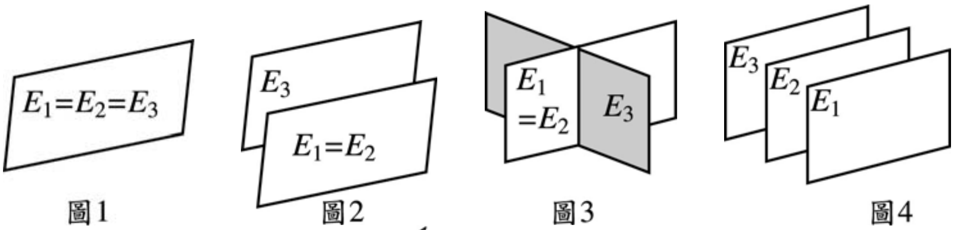

圖1 圖2 圖3 圖4

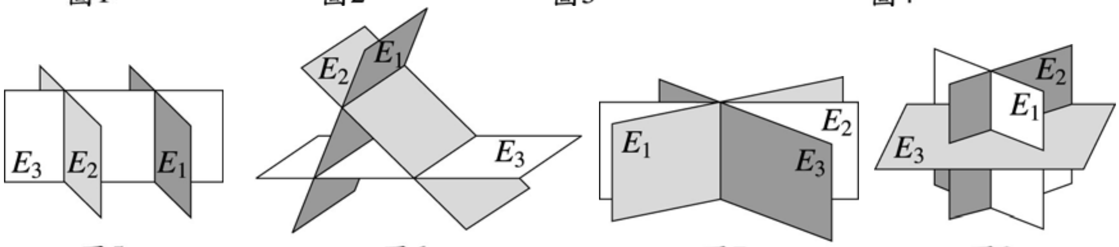

圖5 圖6 圖7 圖8

判斷下列各方程組相交之情形（在空格內，塡入適當的圖號）

(1) $\begin{cases}x+y+z=6\\2x-y+3z=9\\x+3y-z=4\end{cases}$，圖______。 (2) $\begin{cases}x+2y+z=2\\3x+y-2z=4\\2x+4y+2z=4\end{cases}$，圖______。

(3) $\begin{cases}x+2y+z=1\\2x-y+2z=2\\3x+y+3z=3\end{cases}$，圖______。 (4) $\begin{cases}2x-y-z=1\\x-2y-2z=2\\4x-2y-2z=1\end{cases}$，圖______。

答案：8 ; 3 ; 7 ; 5

解析：

(1)解聯立 $\Rightarrow x=1,y=2,z=3$；$\therefore$方程組只有一解，$\therefore$相交於一點，$\therefore$選圖 8。

(2) $\because E_1:x+2y+z=2$, $E_2:2x+4y+2z=4$

$\therefore E_1=E_2$ 且 $E_3:3x+y-2z=4$（與 E_1 相交於一線），$\therefore$選圖 3。

(3)解聯立

$\begin{cases}x+2y+z=1..........①\\2x-y+2z=2........②\\3x+y+3z=3........③\end{cases}$ ①+②×2；②+③$\Rightarrow\begin{cases}x+z=1\\x+z=1\end{cases}$，有無限多解，

三平面相交於一直線，$\therefore$選圖 7。

(4) $\because E_1:2x-y-z=1$, E_2：$4x-2y-2z=1$

$\therefore E_1//E_2$ 且 E_3：$x-2y-2z=2$ （與 E_1 相交於一線），$\therefore$選圖 5。