高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.11.22					
範圍	2-5 空間直線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(A) 空間中二直線 $L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{2},\ L_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z}{n}$ 相交於一點 $P(a,b,c)$，則下列選項何者正確？ (A) $a=-8$ (B) $b=-9$ (C) $c=-2$ (D) $n=1$ (E) $n=-\dfrac{9}{2}$

解析：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{2}=t,\ x=1+3t,\ y=-3t,\ z=-2+2t$

$L_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z}{n},\ x=-2+s, y=-3-2s, z=ns$

$\begin{cases}1+3t=-2+s\\-3t=-3-2s\\-2+2t=ns\end{cases}$，$\therefore t=-3,\quad s=-6,\quad n=\dfrac{4}{3}$

2、(C) 已知直線L_1, L_2交於$(1,0,-1)$，且相互垂直，其中 $L_1:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R},$

$L_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-1-t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$。若以$L_1$為軸將$L_2$旋轉一圈得一平面，則此平面的方程式為何？

(A) $x=1$ (B) $y=0$ (C) $x+y-1=0$ (D) $x-y-z=2$ (E) $x+y-3=0$

解析：平面之法向量即L_2之方向向量$(1,1,0)$，

$\therefore$平面方程式為$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+0\cdot(z+1)=0\Rightarrow x+y=1$

3、(D) 空間中直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2-y}{-4}=\dfrac{2z+3}{4}$ 之方向比為

(A) $4:(-4):2$ (B) $1:(-2):2$ (C) $1:2:2$ (D) $1:2:1$ (E) $1:-2:1$

解析：x,y,z 係數必須為 $1\Rightarrow\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+\frac{3}{2}}{2}$ $\therefore$方向比即為方向向量之分量比$1:2:1$

4、(B) 設直線 L 的方程式為 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，則下列那一個平面與 L 平行？

(A) $2x-y+z=1$ (B) $x+y-z=2$ (C) $3x-y+2z=1$ (D) $3x+2y+z=2$

(E) $x-3y+z=1$

解析：若 $L//E$，則 L 的方向向量$\perp E$ 之法向量$(3,-1,2)\cdot(1,1,-1)=0$

5、(B) 設 $A(2,1,-1), B(5,-5,2)$，則射線 AB 的參數式為

(A) $x=2+3t,\ y=1-6t,\ z=-1+3t,\ t\le 1$ (B) $x=2-t,\ y=1+2t,\ z=-1-t,\ t\le 0$

(C) $x=5+3t,\ y=-5-6t,\ z=2+3t,\ t\ge -3$ (D) $x=5+t,\ y=-5-2t,\ z=2+t,\ t\le -1$

(E) $x=5-t,\ y=-5+2t,\ z=2-t,\ t\ge 3$

解析：$\overrightarrow{AB}=(3,-6,3)=-3(-1,2,-1)$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 設平面 E 與平面 $x-2y+5z=2$ 及 $2x-3y+z=3$ 相交於一直線，又點 $A(-4,1,2)$ 在平面 E 上，則平面 E 的方程式為____________________。

答案：$8x-15y+31z-15=0$

解析：平面族：

設平面 E 為 $k(x-2y+5z-2)+(2x-3y+z-3)=0$，$A(-4,1,2)$ 代入，$2k-12=0$，$\therefore k=6$

$\therefore$ 平面 E 為 $8x-15y+31z-15=0$

2、 設兩平面 $x-5y+2z+11=0$ 與 $4x+y+2z-13=0$ 之交線為 $\dfrac{x-a}{\ell}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-1}{1}$，則數對 $(a,b)=$____________，數對 $(\ell,m)=$____________。

答案：$(2,3)$; $(\dfrac{-4}{7},\dfrac{2}{7})$

解析：交線方向向量 $(1,-5,2)\times(4,1,2)=(-12,6,21)$，$\therefore \dfrac{l}{-12}=\dfrac{m}{6}=\dfrac{1}{21}$，$\ell=\dfrac{-4}{7},\ m=\dfrac{2}{7}$,

$z=1\Rightarrow\ x-5y+13=0,\ 4x+y-11=0$，$x=2,\ y=3$，

$\therefore (a,b)=(2,3),\ (\ell,m)=(-\dfrac{4}{7},\dfrac{2}{7})$

3、 設兩平行線 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{-2},\ L_2:\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+1}{2}$，則由直線 L_1 與 L_2 所決定的平面方程式為______________；又兩平行線間的距離為___________。

答案：$x+z=4$; $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

解析：$P(1,0,3)$ 在 L_1 上，$Q(5,-4,-1)$ 在 L_2 上，$\overrightarrow{PQ}=(4,-4,-4)$,

又 $\vec{v}=(2,-1,2)\Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}\times(2,-1,-2)=(4,0,4)$，

平面之方程式為 $4(x-1)+0(y-0)+4(z-3)=0\Rightarrow x+z=4$，

平行線間距離為 $d(P,L_2)=\dfrac{\square}{|\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{4^2+0^2+4^2}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

4、 設直線 L 過 $A(-1,1,2),\ B(3,-1,8)$ 兩點，若點 $P(3,-2,3)$，則 P 在 L 之垂足為_________；又 P 到直線 L 之距離為________。

答案：$(1,0,5)$; $2\sqrt{3}$

解析：$\overleftrightarrow{AB}: x=-1+2t,\ y=1-t,\ z=2+3t,$ ，設垂足 $H(-1+2t,\ 1-t,\ 2+3t)$

$P(3,-2,3)\Rightarrow\overrightarrow{PH}=(2t-4,-t+3,3t-1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,-1,3)$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow(2t-4,-t+3,3t-1)\cdot(2,-1,3)=0$，$\therefore t=1$，$\therefore$ 垂足為 $(1,0,5)$,

$d(P,L)=\overline{PH}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$

5、 設直線 $L_1:\dfrac{2x+1}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{1}$，直線 $L_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{2}$，則直線 L_1 與直線 L_2 之交點為______________，又由直線 L_1 與直線 L_2 所決定的平面方程式為_________________。

答案：$(\frac{3}{2},2,-2)$； $2x-y-3z-7=0$

解析：$L_2: x=2+t,\ y=-4t,\ z=-1+2t$, 代入$L_1 \Rightarrow \frac{2(2+t)+1}{4}=\frac{-4t-1}{1},\ t=-\frac{1}{2}$,交點$(\frac{3}{2},2,-2)$

$(2,1,1)\times(1,-4,2)=(6,-3,-9)=3(2,-1,-3)$

$\therefore$平面方程式為$2(x-2)-(y-0)-3(z+1)=0 \Rightarrow 2x-y-3z-7=0$

6、 過$A(3,-2,-2), B(-1,0,-2)$兩點的直線L與平面$E: 2x-y-2z=7$之交點為__________，又直線L與平面E之銳夾角為θ，則$\cos\theta=$_______ 。

答案：$(1,-1,-2)$; $\frac{2}{3}$

解析：$\overleftrightarrow{AB}: x=-1+4t,\ y=-2t,\ z=-2$，方向向量$\overrightarrow{AB}=(4,-2,0)=2(2,-1,0)$

代入平面$2(4t-1)-(-2t)-2(-2)=7$，$t=\frac{1}{2}$，交點為$(1,-1,-2)$

設直線L與E之法向量夾角$\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{(2,-1,-2)\cdot(2,-1,0)}{3\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，則$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \cos\theta=\sin\alpha=\frac{2}{3}$

7、 設平面E，包含直線$L: \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$並且垂直平面$F: x-2y+z=5$，則平面$E$之方程式為______________。

答案：$4x+y-2z+11=0$

解析：$(2,-2,3)\times(1,-2,1)=(4,1,-2)$，$\therefore$平面$E$之方程式為$4x+y-2z+11=0$

8、 設直線$L: \begin{cases} x-2y-3z=5 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$則直線$L$的方向比為____________。(以簡單整數比做答)

答案：1：-1：1

解析：$(1,-2,-3)\times(2,1,-1)=(5,-5,5)$，$\therefore$直線$L$的方向比為 $1:-1:1$

9、 若二直線$L_1: \frac{2x}{3}=3y+1=\frac{1-z}{4}$與$L_2: \frac{x-8}{a}=\frac{y-4}{b}=\frac{z+14}{c}$平行，則$a:b:c=$__________。

答案：9：2：(-24)

解析：$L_1: \frac{x}{\frac{3}{2}}=\frac{y+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{z-1}{-4}$；$\therefore a:b:c=(\frac{3}{2}):\frac{1}{3}:(-4)=9:2:(-24)$

10、設$A(3,1,4)$，直線$L: \frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{2}$，則由點$A$與直線$L$所決定之平面方程式為________。

答案：$8x+6y-7z=2$

解析：$B(1,-1,0)$在L上，又$A(3,1,4)$，故$\overrightarrow{AB}=(2,2,4)$, $(2,2,4)\times(4,-3,2)=(16,12,-14)$

$\therefore$平面方程式為$8x+6y-7z=2$

11、設兩直線$L_1: \frac{x+5}{1}=\frac{y-1}{+2}=\frac{z}{4}, L_2: \frac{x+7}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-a}{8}$交於一點$P$，則$P$點坐標為______；又$a=$________。

答案：$(-2,7,12);\ 4$

解析：$L_1: x=-5+t,\ y=1+2t,\ z=4t$，代入 $L_2 \Rightarrow \dfrac{-5+t+7}{5}=\dfrac{1+2t-1}{6}$，$\therefore t=3$，交點爲

$(-2,7,12)$，再代入 $L_2 \Rightarrow \dfrac{7-1}{6}=\dfrac{12-a}{8}$，$\therefore a=4$

12、若直線 $L: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{3}$ 在平面 $E: x+ay-2z=b$ 上，則 $a=$________，$b=$________。

答案：4; 10

解析：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{3}=t \quad \therefore x=-2+2t,\ y=3+t,\ z=3t$

$(2t-2)+a(t+3)-2(3t)=b$，$(a-4)t=b+2-3a \Rightarrow a=4,\ b+2-3a=0,\ b=10$

13、若 $A(-2, 8, 12), B(3, -2, -3), C(1, y, z)$三點共線，求 y, z 之值。

答案：$y=2,\ z=3$

解析：$\overrightarrow{AB}=(3+2,\ -2-8,\ -3-12)=(5,\ -10,\ -15)=5(1,\ -2,\ -3)$

設$\begin{cases} 1=-2+t \\ y=8-2t \\ z=12-3t \end{cases}$，得 $t=3,\ y=2,\ z=3$

14、設 $A(2,-2,4), B(3,0,1)$，點 P 在平面 $E: 2x-y+2z=5$ 上，則 P 點坐標爲何時，可使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小，又其最小値爲何？

答案：$(\dfrac{7}{4},0,\dfrac{3}{4})$ ；$\sqrt{26}$

解析：A 對平面 E 之對稱點 A' 爲 $(2,-2,4)-2\times\dfrac{9}{3}\times\dfrac{(2,-1,2)}{3}=(-2,0,0)$

$\overleftrightarrow{A'B}: x=-2+5t,\ y=0,\ z=t$，$\overleftrightarrow{AB}$ 與平面 E 之交點爲 $2(-2+5t)+2t=5 \quad \therefore t=\dfrac{3}{4}$

$\therefore P$ 點爲 $(\dfrac{7}{4},0,\dfrac{3}{4})$，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小值爲 $\overline{A'B}=\sqrt{26}$

15、試求過一點 $P(3, 2, -1)$而與直線 $L_1: \begin{cases} x+3y-1=0 \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ 平行的直線 L_2 之方程式。

答案：$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$

解析：L_2 之方向向量 $=$ L_1 之方向向量 $=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(\begin{vmatrix}3&0\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\0&3\end{vmatrix}\right)=(3,-1,3)$

L_2 之對稱比例式爲 $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ 。

16、設 $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{1-y}{6}=\dfrac{z-5}{2}, L_2:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{3-z}{2}$

(1)求包含 L_1 且平行 L_2 的平面？　　(2)求 L_1, L_2 的最近距離？

答案：(1) $2x+y+2z=17$　(2) 6

解析：$L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z-5}{2}, L_2:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-2}$

(1)設平面 E 包含 L_1 與 L_2 平行，法向量爲 $\vec{n}$

$\therefore \vec{n}\perp\vec{v_1}$ 且 $\vec{n}\perp\vec{v_2}$，$\vec{v_1}=(1,-6,2)$，$\vec{v_2}=(3,-2,-2)$

$\therefore \vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=(3,-2,-2)=\left(\begin{vmatrix}-6 & 2\\-2 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -6\\3 & -2\end{vmatrix}\right)=(16,8,16)$

$\therefore \vec{n}=8(2,1,2)$，$\therefore E$：$2(x-3)+(y-1)+2(z-5)=0\Rightarrow 2x+y+2z=17$

(2)點 $B(-4, 1, 3)$在 L_2 上，$d(L_1,L_2)=d(B, E)=\left|\dfrac{-8+1+6-17}{\sqrt{4+1+4}}\right|=6$

17、兩歪斜線 $L_1:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-12}{1}=\dfrac{z-4}{4}$, $L_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z}{1}$，則其公垂線 L 之對稱比例式爲何？又兩歪斜線間的距離爲何？

答案：$\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+4}{-14}=\dfrac{z-1}{5}$；$\sqrt{230}$

解析：設P在L_1上，$P(-2t-2,t+12,4t+4)$；　Q在L_2上，$Q(3s+2,s-5,s)$

$\overrightarrow{PQ}=(3s+2t+4,s-t-17,s-4t-4)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot(-2,1,4)=0,\ \overrightarrow{PQ}(3,1,1)=0\ \Rightarrow 11s+t-9=0$，$s+21t+41=0$，$\therefore s=1$，$t=-2$；

$\Rightarrow P(2,10,-4), Q(5,-4,1)$，$\therefore \overleftrightarrow{PQ}:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+4}{-14}=\dfrac{z-1}{5}$；　$d(P,Q)=\overline{PQ}=\sqrt{230}$

18、設空間中兩點$A(-4,2,5), B(5,5,-1)$與直線 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ 在 L 上找一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小，則 P 點坐標爲何？又此時 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 之最小值爲何？

答案：$P(-3,3,1)$；$9\sqrt{2}$

解析：A 對直線 L 之投影點爲 $A'(2t+3,-t,-2t-5)$

$(2t+7,-t-2,-2t-10)\cdot(2,-1,-2)=0$　$\therefore t=-4$，$\therefore A'(-5,4,3)$且 $\overline{AA'}=3$

B 對直線 L 之投影點爲 $B'(2s+3,-s,-2s-5)$

$(2s-2,-s-5,-2s-4)\cdot(2,-1,-2)=0$　$\therefore s=-1$，$\therefore B'(1,1,-3)$, $\overline{BB'}=6$

$\therefore P$ 在 $\overline{A'B'}$ 上且 $\overline{PA'}:\overline{PB'}=1:2\Rightarrow P(-3,3,1)$且 $\overline{PA}+\overline{PB}=\sqrt{18}+\sqrt{72}=9\sqrt{2}$