高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.11.15					
範圍	2-4 空間平面方程式	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 設 $A(1, 1, 2), B(0,-1, 3)$，若平面 $E: ax+by+cz=1$ 爲 $\overline{AB}$ 的垂直平分面，求 $a+b+c=$？ (A)2 (B)1 (C)0 (D)–1 (E)–2

解析：$\because \overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}=(-1,-2,1)$，又中點 $M(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2})$ 在平面 E 上，

$\therefore E:\ -(x-\frac{1}{2})-2(y-0)+(z-\frac{5}{2})=0 \Rightarrow x+2y-z=-2 \Rightarrow \frac{-1}{2}x-y+\frac{1}{2}z=1$

$\therefore a+b+c=\frac{-1}{2}-1+\frac{1}{2}=-1$

2、(D) 設 P, Q 爲平面 $ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(x_0, y_0, z_0)$，則 $\overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)$ 爲 (A)不定值，隨 (x_0, y_0, z_0) 而改變 (B)25 (C)5 (D)0 (E)1

解析：平面 $ax+by+cz=5 \Rightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$

平面之法向量垂直平面上所有的向量，即 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)=0$

3、(B) 一平面通過(1,2,1)並通過二平面 $x+2y-3z=0$ 與 $x-y+z=1$ 的交線，則此平面的方程式爲 (A) $3x-2z=1$ (B) $3x-z=2$ (C) $2x-z=1$ (D) $x+y+z=4$

解析：設平面爲 $(x+2y-3z)+k(x-y+z-1)=0$，代入(1,2,1)

得 $2-k=0$　$\therefore k=2$　$\therefore$ 平面爲 $3x-z=2$

4、(B) 過點 $A(4,2,-1)$ 而與 zx 平面平行之平面方程式可爲 (A) $x=4$ (B) $y=2$ (C) $z=-1$ (D) $x+z=3$ (E) $x+y+z=5$

解析：$\because$ 與 zx 平面平行　$\therefore$ 平面法向量爲(0,1,0)

$\Rightarrow 0(x-4)+(y-2)+0(z+1)=0 \Rightarrow y-2=0$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 設平面 E 上有兩點 $A(2,-3,1), B(4,1,2)$ 且平面 E 與平面 $F: 7x-y+2z=5$ 垂直，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$3x+y-10z=-7$

解析：$\overrightarrow{AB}=(2,4,1)$；$\overrightarrow{n_F}=(7,-1,2)$，所求平面 E 法向量 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_F}=(3,1,-10)$

$\therefore$ 平面 $E: 3(x-2)+(y+3)-10(z-1)=0 \Rightarrow 3x+y-10z+7=0$

2、 設平面 $E_1: 2x-4y+3z=11$，平面 $E_2: 4x+ay+bz=5$，平面 $E_3: 3x+y-cz=7$，(1)若平面 $E_1 // E_2$，則數對 $(a, b)=$______________；(2)若平面 $E_2 \perp E_3$，則 $c=$____________。

答案：(1) (–8; 6) ;(2) $\frac{2}{3}$

解析：(1) $E_1 // E_2$ $\therefore \frac{2}{4}=\frac{-4}{a}=\frac{3}{b}$，$\therefore a=-8,\ b=6$

(2) $E_2 \perp E_3$ $\therefore E_3 \perp E_1$ $\therefore (2,-4,3)\cdot(3,1,-c)=0 \Rightarrow c=\frac{2}{3}$

3、 求二平面 $y+z=5$ 與 $x+y=3$ 所成的二面角的平分角面方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$x+2y+z=8$；$x-z+2=0$

解析：$\frac{|y+z-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}} \Rightarrow (y+z-5)=\pm(x+y-3)$，$\therefore x+2y+z=8$ 或 $x-z+2=0$

4、 設 $E_1: x+ky+z-12=0$，$E_2: x+y+kz=5$，若 E_1 與 E_2 之夾角爲 60° 時，求 $k=$＿＿＿。

答案： 0 或 4 或–2

解析：$\overrightarrow{n_1}=(1,k,1)$ ，$\overrightarrow{n_2}=(1,1,k)$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\pm\frac{1+k+k}{\sqrt{1+k^2+1}\cdot\sqrt{1+1+k^2}} \Rightarrow k^2+2=\pm 2(1+2k)$

$\therefore k^2-4k=0$ 或 $k^2+4k+4=0$ ，$\therefore k=0$ 或 4 或–2。

5、 若空間中有三點 $A(3,1,0)$, $B(1,5,2)$, $C(5,2,1)$，則

(1)平面 ABC 的方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿，

(2)△ABC 的面積爲＿＿＿＿＿＿＿＿，

(3)若點 $D(1,0,a)$落在平面 ABC 上，則 $a=$＿＿＿＿＿。

答案：(1) $x+3y-5z=6$； (2) $\sqrt{35}$； (3) -1

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(-2,4,2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,1,1)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,6,-10)$

$\Rightarrow$ 平面 ABC 爲 $2(x-3)+6(y-1)-10(z-0)=0 \Rightarrow x+3y-5z=6$,

(2)△ABC 面積 $=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+6^2+(-10)^2}=\sqrt{35}$

(3) $D(1,0,a)$代入平面 ABC： $x+3y-5z=6$ ，$1-5a=6$ $\therefore a=-1$

6、 試求 yz 平面與 $2x+2y-z=4$ 的角平分面方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$5x+2y-z=4$ 或 $x-2y+z+4=0$

解析：yz 平面方程式爲 $x=0$

$\frac{|x|}{1}=\frac{|2x+2y-z-4|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \Rightarrow \pm(3x)=2x+2y-z-4$

$\therefore 5x+2y-z=4$ 或 $x-2y+z+4=0$

7、 設平面 E: $2x-y+2z=3$，若平面 F 與平面 E 平行，且與平面 E 之距離爲 2，則平面 F 之方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿或＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$2x-y+2z=9$；$2x-y+2z=-3$

解析：設平面 F：$2x-y+2z=k$

$$d(E,F)=\frac{|3-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2 \quad \therefore |k-3|=6\Rightarrow k=9\text{或}-3$$

即方程式為 $2x-y+2z=9,\ 2x-y+2z=-3$

8、 若 $A(-2, 5, 4), B(1, 4,-5)$兩點在平面 E: $2x-y+2z+4=0$ 之兩側且 $\overline{AB}$ 交平面 E 於 P 點，求 $\overline{AP}:\overline{BP}$ 的比值為________________。

答案：$\frac{3}{8}$

解析：$\because A, B$ 在平面 E 上的兩側

$$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=d(A, E):d(B, E)=\left|\frac{-4-5+8+4}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right| : \left|\frac{2-4-10+4}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right|=3:8=\frac{3}{8}$$

9、 若 A 為 $5x-y-2z=3$ 平面上的一點，又點 $P(3,1,-2)$為平面外一點，則 $\overline{AP}$ 距離之最小值為________________，又此時 A 點坐標為________________。

答案：$\frac{\sqrt{30}}{2};(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1)$

解析：P 在平面之投影點為 $(3,1,-2)-\frac{(15)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(-2)^2}}\cdot\frac{(5,-1,-2)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(-2)^2}}=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1)$

此時 $\overline{AP}$ 距離之為最小 $=\frac{15}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

10、設 $P(3,1,1), Q(1,0,-4), R(3,4,0)$，若平面 E 通過 P 點且直線 QR 垂直平面 E，則平面 E 的方程式為____________________。

答案：$x+2y+2z=7$

解析：$\overrightarrow{QR}=(2,4,4)$, 取法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{QR}$ $\quad\therefore x+2y+2z=7$

11、過$(1,-2, 3)$且與 $x+y+z+1=0$, $3x+2y+z-1=0$ 均垂直之平面方程式？_______________

答案：$x-2y+z-8=0$

解析：令 $\vec{n_1}=(1, 1, 1), \vec{n_2}=(3, 2, 1)\Rightarrow \vec{n_1}\times\vec{n_2}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}\right)=(-1,\ 2,\ -1)$

$\therefore$所求平面 $-(x-1)+2\cdot(y+2)-(z-3)=0$，即 $x-2y+z-8=0$。

12、求與平面 E: $x-2y+2z-7=0$ 平行而與 E 之距離為 5 之平面的方程式。_______________

答案：設所求之平面方程式為 $x-2y+2z+d=0$，則 $\frac{|d+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=5$

$|d+7|=5\sqrt{9}=15$， $d+7=\pm15\Rightarrow d=8,-22$，

所求平面有二， $x-2y+2z+8=0$ ； $x-2y+2z-22=0$

13、試求點 $A(0, 1, 5)$在平面 E: $x+y-2z+3=0$ 上的投影點________及 A 對於 E 的對稱點________。

答案： $t=0+1-2\times5+3=-6,$

A 在 E 上的投影爲 $(0,\ 1,\ 5)-\dfrac{-6}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}\times\dfrac{(1,\ 1,\ -2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=(1,\ 2,\ 3)$ 。

A 對於 E 的對稱點爲 $(0,\ 1,\ 5)-2\times\dfrac{-6}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}\times\dfrac{(1,\ 1,\ -2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=(2,\ 3,\ 1)$ 。

14、試求與平面 $3x+2y+z+8=0$ 平行，而在三坐標軸上的截距之和爲 22 之平面的方程式。________。

答案：設所求平面之方程式爲 $3x+2y+z=6k$ ，即 $\dfrac{x}{2k}+\dfrac{y}{3k}+\dfrac{z}{6k}=1$

又題意 $2k+3k+6k=22$ ， $k=2$ ，故所求平面之方程式爲 $3x+2y+z=12$

15、試求二平面 $x-y+z-3=0$ 與 $x+y+\sqrt{6}z+2=0$ 的夾角。________。

答案：設此二平面夾角爲 θ ，則 $\cos\theta=\pm\dfrac{1\times1+(-1)\times1+1\times\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\times\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{6})^2}}=\pm\dfrac{1}{2}$

即 $\theta=60^\circ$ ，故此二平面之夾角爲 60° 或 120° 。

16、平面 E 與三坐標軸交於 $A(6,0,0)$, $B(0,-2,0)$, $C(0,0,4)$三點，則

(1)原點到平面 ABC 的距離爲何？________；

(2)又四面體 $OABC$ 的體積爲何？________；

(3)$\triangle ABC$ 的面積爲何？________。

答案：(1)平面 ABC: $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=1\Rightarrow 2x-6y+3z-12=0$ ，

$d(O$，平面 $ABC)=\dfrac{|0-0+0-12|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{12}{7}$

(2)四面體 $OABC$ 的體積 $\dfrac{1}{3}\times\Delta OAB\times\overline{OC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times2\times4=8$

設$\triangle ABC$ 的面積 $=a$, $\dfrac{1}{3}\times a\times\dfrac{12}{7}=8\Rightarrow a=14$

17、試求過 $A(6, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, $C(0, 0, 4)$三點的平面之方程式。________

答案：此平面之方程式爲 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-3}+\dfrac{z}{4}=1$ ，即 $2x-4y+3z-12=0$