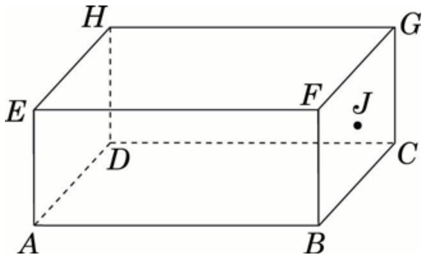
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：96.11.08					
範圍	2-3、4 空間向量、平面方程式	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)



1、(ABCD) (複選)如圖，*ABCD-EFGH*為一平行六面體，*J*為四邊形*BCGF*的中心，如果 $\overrightarrow{AJ}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AD}+c\,\overrightarrow{AE}$ ，試問下列哪些選項是正確的？　(A) $\frac{1}{3}<b<\frac{2}{3}$

|(B) $a+b+c=2$　　(C) $a=1$　　(D) $a=2c$　　(E) $a=b$

解析：建立空間直角坐標系： $A(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，$D(-1,0,0)$，$E(0,0,1)$，

$C(-1,1,0)$，$F(0,1,1)$，$\Rightarrow J(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

所以 $\overrightarrow{AJ}=(-\frac{1}{2},\ 1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(-1,0,0)+(0,1,0)+\frac{1}{2}(0,0,1)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

則 $a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{2}$ 。

2、(D)　過點 $A(4,2,-1)$而與 x 軸平行之平面方程式可能為

(A) $x=4$　　(B) $x+y+z=5$　　(C) $x+y=6$　(D) $y+z=1$　(E) $x+z=3$

解析：設平面法向量為(a,b,c)，且平面與 x 軸平行，則平面法向量與 x 軸垂直，

故 $(a,b,c)\cdot(1,0,0)=0\Rightarrow a=0\quad b,c\in R$

3、(D)　設 θ 為二平面 $x-2y-z-4=0$ 與 $2x+y+z+1=0$ 之銳夾角，則 θ 為

(A) $0^\circ\le\theta<30^\circ$　(B) $30^\circ\le\theta<45^\circ$　(C) $45^\circ\le\theta<60^\circ$　(D) $60^\circ\le\theta<90^\circ$　(E) $\theta=90^\circ$

解析： $\cos\theta=\frac{|(1,-2,-1)\cdot(2,1,1)|}{|\sqrt{6}\sqrt{6}|}=\frac{1}{6}$ ， $0<\frac{1}{6}<\frac{1}{2}\Rightarrow\cos90^\circ<\cos\theta<\cos60^\circ\Rightarrow60^\circ<\theta<90^\circ$

二、填充題 (每題 10 分)

1、　設 $\vec{x}=(k-2,3,1),\ \vec{y}=(6,2k+1,3)$ ，

(1)若 $\vec{x}//\vec{y}$ ，則 $k=$_________，(2)若 $\vec{x}\perp\vec{y}$ ，則 $k=$_________。

答案：4; $\frac{1}{2}$

解析：(1) $\vec{x}//\vec{y}\Rightarrow\quad\frac{k-2}{6}=\frac{3}{2k+1}=\frac{1}{3},\ k=4$

(2) $\vec{x}\perp\vec{y}\Rightarrow\quad(k-2,3,1)\cdot(6,2k+1,3)=0,\ \ k=\frac{1}{2}$

2、　設 $\vec{a}=(-2,1,2),\ |\vec{b}|=6$ ，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最小值為________；此時 $\vec{b}=$________。

答案：-18; $(4,-2,-4)$

解析：$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\,|\vec{b}|\Rightarrow\therefore\ |\vec{a}\cdot\vec{b}|\le 18$　　$\therefore -18\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le 18$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最小值爲-18，

$$\text{此時}\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta\\ |\vec{a}|\,|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{b}|=6\\ \cos\theta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{b}|=2|\vec{a}|\\ \theta=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\vec{b}=-2\vec{a}=(4,-2,-4)$$

3、 設 $A(1,-5,2), B(4,3,-5), C(1,2,6)$，若 $\vec{a}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$，則 $\vec{a}=$__________；若 G 爲$\triangle ABC$ 的重心，則 G 點坐標爲__________。

答案：$(3,15,-3)$; $(2,0,1)$

解析：$\vec{a}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=2(3,8,-7)-(3,1,-11)=(3,15,-3)$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(\frac{1+4+1}{3},\frac{-5+3+2}{3},\frac{2-5+6}{3})=(2,0,1)$$

4、設$\triangle ABC$ 之三頂點爲 $A(4, 1, 5),\ B(1, -2, 1),\ C(-2, 7, 3)$，試求$\triangle ABC$ 的重心 G 之坐標。

答案：$(1,\ 2,\ 3)$

解析：$G=(\frac{4+1-2}{3},\ \frac{1-2+7}{3},\ \frac{5+1+3}{3})=(1,\ 2,\ 3)$

5、 試求點 $P(7,-1,-2)$到過 $A(1,9,-4), B(4,-3,5)$的直線之距離。

答案：6

解析：$\vec{a}=\overrightarrow{AP}=(7-1,-1-9,-2+4)=(6,-10,2)$

$\vec{b}=\overrightarrow{AB}=(4-1,-3-9,5+4)=(3,-12,9)$

$$\text{所求距離爲}\sqrt{|\vec{a}|^2-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}}=\sqrt{(6^2+(-10)^2+2^2)-\frac{(18+120+18)^2}{3^2+(-12)^2+9^2}}=6$$

6、 設 $A(-1,1,3), B(2\sqrt{3}-1,-1,3)$，則

$\overrightarrow{AB}$ 之方向角爲________，________，________，

$\overrightarrow{AB}$ 之方向餘弦爲________，________，________。

答案：$\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1}{2}$; 0

解析：$\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},-2,0),\ |\overrightarrow{AB}|=4\Rightarrow\overrightarrow{AB}=4(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)=4(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$\therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\beta = \frac{-1}{2},\ \cos\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6},\ \beta = \frac{2\pi}{3},\ \gamma = \frac{\pi}{2}$；方向餘弦$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 0$

7、 平面$E_1: 3x + y + 2kz = 5$與平面$E_2: kx - 2y + kz = 1$互相垂直，則$k =$________或________。

答案：$\frac{1}{2}; -2$

解析：$E_1 \perp E_2,\ (3,1,2k)\cdot(k,-2,k) = 0 \Rightarrow 3k - 2 + 2k^2 = 0$ ，$\therefore k = \frac{1}{2}$或$-2$

8、設平面E與平面$2x - 2y + z = 9$平行且與三坐標軸之截距和爲12，則平面E的方程式____。

答案：$2x - 2y + z = 12$

解析：設平面$E: 2x - 2y + z = 4k$ ，交三軸分別於$(2k,0,0),\quad (0-2k,0)\quad (0,0,4k)$

$\therefore 2k + (-2k) + 4k = 12$ ，$\therefore k = 3$ ，　$\therefore$平面$E: 2x - 2y + z = 12$

9、 設平面E上有兩點$A(2,-3,1), B(4,1,2)$且平面E與平面$F: 7x - y + 2z = 5$垂直，則平面E的方程式爲________。

答案：$3x + y - 10z = -7$

解析：

平面E法向量$\vec{n}$ ，$\vec{n}_E = (7,-1,2)$ ，$\overline{AB} = (2,4,1)$

$\therefore \vec{n}_E \times \overline{AB} = (\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = (-9,-3,30) = -3(3,1,-10) \Rightarrow$取$\vec{n} = (3,1,-10)$ ，

$\therefore$平面$E: 3(x-2) + (y+3) - 10(z-1) = 0 \Rightarrow 3x + y - 10z = -7$

10、由$A(3,1,1)$對平面E的投影點爲$(1,2,1)$，則平面E的方程式爲________。

答案：$2x - y = 0$

解析：法向量$(3-1,1-2,1-1) = (2,-1,0)$

$\therefore$平面E爲$2(x-1) - (y-2) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$

11、過$A(1, 0, 2), B(0,-2, 3), C(1,-5,-3)$三點之平面方程式爲________。

答案：$3x - y + z = 5$

解析：$\overrightarrow{AB} = (-1,-2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (0,-5,-5) = 5(0,-1,-1)$

$\therefore \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow$取$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (3, -1, 1)$

$\therefore E:: \ 3(x-1) - (y-0) + (z-2) = 0 \Rightarrow 3x - y + z = 5$

12、設空間中有一平面$E: 2x - y + 3z = 7$ ，及兩點$A(1,3,2), B(-2,1,5)$ ，若直線AB交平面E於C，則$\overline{AC} : \overline{BC} =$________。

答案：2 : 3

解析：$\overline{AC}:\overline{BC}=d(A,E):d(B,E)=\dfrac{|2-3+6-7|}{\sqrt{14}}:\dfrac{|-4-1+15-7|}{\sqrt{14}}=2:3$

13、設 $A(-2,1,4)$, $B(4,3,2)$，則 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式爲_________。

答案：$3x+y-z=2$

解析：$\overline{AB}$ 之中點 $(1,2,3)$，$\overrightarrow{AB}=(6,2,-2)\,//\,\vec{n}$，取 $\vec{n}=(3,1,-1)$

$3(x-1)+(y-2)-(z-3)=0\Rightarrow$ 平面爲 $3x+y-z-2=0$

14、設 $A(2,5,1)$ 在平面 E 上，且平面 E 與二平面 $3x-y+5z=7$，$x-y+2z=11$ 均垂直，則平面 E 的方程式爲________。

答案：$3x-y-2z+1=0$

解析：$(3,-1,5)\times(1,-1,2)=(3,-1,-2)\,//\,\overrightarrow{n}$，取 $\vec{n}=(3,-1,-2)$

$3(x-2)-(y-5)-2(z-1)=0\Rightarrow$ 平面爲 $3x-y-2z+1=0$

15、設點 $A(3,1,-1)$，平面 E: $x-2y+z=4$，則 A 在平面 E 上之

(1)投影點爲________，(2)對稱點爲________。

答案：$(\frac{11}{3},\frac{-1}{3},-\frac{1}{3})$；$(\frac{13}{3},\frac{-5}{3},\frac{1}{3})$

解析：

Sol 一：

因爲 $3-2+(-1)-4=-4$

投影點 $(3-\dfrac{1\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},1-\dfrac{1\times(-2)\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},-1-\dfrac{1\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2})=(\dfrac{11}{3},\dfrac{-1}{3},\dfrac{-1}{3})$

對稱點 $(3-\dfrac{2\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},1-\dfrac{2\times(-2)\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2},-1-\dfrac{2\times1\times(-4)}{1^2+(-2)^2+1^2})=(\dfrac{13}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3})$

Sol 二：

投影點 $(3,1,-1)-\dfrac{(-4)}{\sqrt{6}}\times\dfrac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}=(\dfrac{11}{3},\dfrac{-1}{3},\dfrac{-1}{3})$

對稱點 $(3,1,-1)-2\times\dfrac{(-4)}{\sqrt{6}}\times\dfrac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}=(\dfrac{13}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3})$