高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：96.11.01					
範圍	2-3 空間向量	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 設 A 的坐標為$(5,0,7)$，B 的坐標為$(-1,-3,1)$，P 為 $\overline{AB}$ 上之一點，$\overline{AP}=3\overline{BP}$，則 P 之坐標為 (A)$(2,9,1)$ (B)$(1,-\frac{1}{2},3)$ (C)$(\frac{1}{2},9,1)$ (D)$(\frac{1}{2},-\frac{9}{4},\frac{5}{2})$ (E)$(\frac{1}{2},-\frac{9}{4},3)$

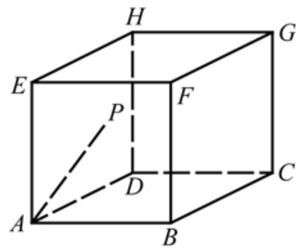
解析：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=(\frac{-3+5}{3+1},\frac{-9+0}{3+1},\frac{3+7}{3+1})=(\frac{1}{2},-\frac{9}{4},\frac{5}{2})$$

2、(D) 設 $\vec{a}=(-2,1,-1)$, $\vec{b}=(4,x,y)$, $\vec{c}=(z,3,1)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$ 且 $\vec{a}\perp\vec{c}$，求 $x+y+z=$？

(A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1 (E)-1

解析：$\because \vec{a}//\vec{b} \Rightarrow \frac{-2}{4}=\frac{1}{x}=\frac{-1}{y}, \Rightarrow x=-2,\ y=2$

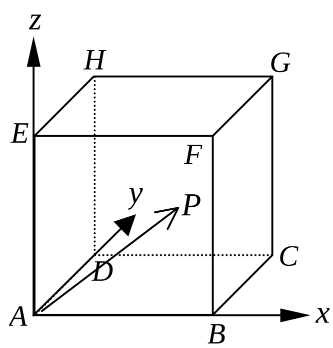


$\vec{a}\perp\vec{c} \Rightarrow -2z+3-1=0 \Rightarrow z=1$

$\therefore x+y+z=-2+2+1=1$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 如右上圖所示，ABCD-EFGH 為邊長等於 1 之正立方體。若 P 點在立方體之內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$, 則 P 點至直線 AB 之距離為______。(化成最簡分數)



答案：$\frac{5}{6}$

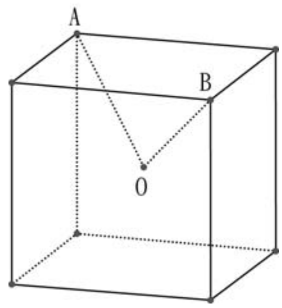
解析：

建立坐標系，則 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,0,1)$

$\because \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}(1,0,0)+\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{2}{3}(0,0,1)=(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3}) \Rightarrow P$ 點坐標為$(\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

因此 P 到直線 AB 之距離$=P$ 到 x 軸之距離$=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{2}{3})^2}=\frac{5}{6}$



2、 如圖所示設一正立方體的中心為 O，而 A, B 為此正立方體同一面上的兩個對頂點，則 $\cos\angle AOB=$______。(以最簡分數表示)

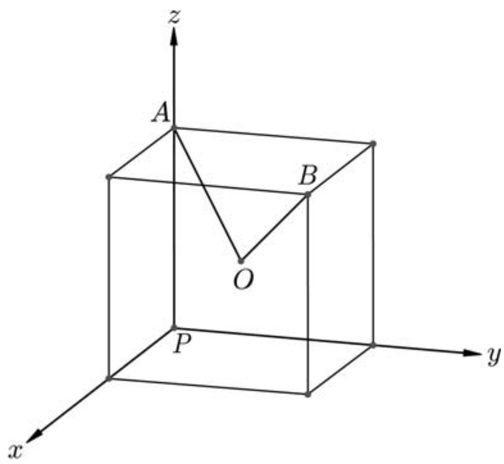
答案：$-\frac{1}{3}$

解析：

建立一坐標系，令正立方體之稜長為 2，取 $P=(0,0,0)$，$A=(0,0,2)$，$B=(2,2,2)$，

如圖，$O=(1,1,1)\Rightarrow \overrightarrow{OA}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,1)$

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}=\frac{-1-1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$$



3、 設 $\vec{x}=(k-2,3,1),\ \vec{y}=(6,2k+1,3)$，若 $\vec{x}/\!/\vec{y}$，則

$k=$_________，若 $\vec{x}\perp\vec{y}$，則 $k=$_________。

答案：4; $\frac{1}{2}$

解析：

$$\vec{x}/\!/\vec{y}\quad \therefore \frac{k-2}{6}=\frac{3}{2k+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow k=4$$

$$\vec{x}\perp\vec{y}\quad \therefore \vec{x}\cdot\vec{y}=0,\ 6k-12+6k+3+3=0\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

4、設 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角爲_____________；

又 $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$________；又 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$______________。

答案：150°；$10-5\sqrt{3}$；$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

解析：

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-\sqrt{3}}{2\cdot 1}\Rightarrow \theta=150^\circ$$

$$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=3|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=12-5\sqrt{3}-2=10-5\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\,\vec{b}=8-4\sqrt{3}$$

$$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

5、設 $A(5,1,2), B(2,2,1), C(8,x,y)$三點共線，則 $x=$________, $y=$________。

答案：0; 3

解析：

$\because A, B, C$ 三點共線，$\therefore \overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{AC}$，$\dfrac{3}{-3}=\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}\Rightarrow x=0$，$y=3$

6、 設 $\vec{a}=(2,-5,4),\ \vec{b}=(2,-2,1)$，當 $|\vec{a}+t\vec{b}|$最小時，$t=$________；又其最小值爲________。

答案：-2; 3

解析：

若 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 最小時，$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，$18+9t=0$，$\therefore t=-2$ 時 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 之最小值爲 $|(2,-5,4)-2(2,-2,1)|=|(-2,-1,2)|=3$

7、 設 $\overrightarrow{OA}=(2,\sqrt{6},\sqrt{2}),\ \overrightarrow{OB}=(1,-1,1)$，若 $\overrightarrow{OC}$ 平分 $\angle AOB$ 且 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OA}$，則 $t=$________。

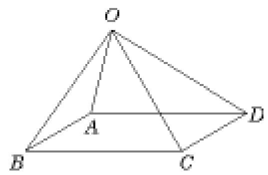
答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：

$\because |\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{3},\ |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|=2\,|\overrightarrow{OB}|$

$\therefore 2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$ 平分 $\angle AOB$，$\therefore \overrightarrow{OC}//(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})$　　$\therefore t=\dfrac{1}{2}$

8、 如圖金字塔形的四角錐 $OABCD$ 中，各稜長均爲 4，則



(1) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$________，(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD}$________。

答案：0; -8

解析：

(1)在$\triangle OBD$ 中，$\overline{OB}=\overline{OD}=4,\ \overline{BD}=4\sqrt{2}$ (因爲 ABCD 爲正方形)

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{4^2+4^2-(4\sqrt{2})^2}{2}=\dfrac{16+16-32}{2}=0$

(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{16+16-16}{2}=-8$

9、 設 $x,y,z\in\mathbb{R}$，若 $2x-3y+z=3$，則 $x^2+(y-1)^2+z^2$ 之最小值爲________，又此時 $y=$________。

答案：$\dfrac{18}{7}$; $-\dfrac{2}{7}$

解析：

$$\begin{array}{ccc} x & y-1 & z \\ 2 & -3 & 1 \end{array}$$

$[2x-3(y-1)+z]^2\le[x^2+(y-1)^2+z^2][2^2+(-3)^2+1^2]$

$[2x-3y+3+z]^2\le[x^2+(y-1)^2+z^2]\times14$

$\dfrac{36}{14}\le[x^2+(y-1)^2+z^2]$

$\therefore x^2+(y-1)^2+z^2$ 最小值 $\dfrac{18}{7}$

此時 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{1}=t,\ 2(2t)-3(-3t+1)+t=3$，$\therefore t=\dfrac{3}{7}\Rightarrow y=-\dfrac{2}{7}$

10、設 a, b, c 均爲正數，且 $a+2b+3c=2$，則 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ 之最小值爲_______，此時 $a=$______。

答案：18; $\frac{1}{3}$

解析：柯西不等式

$\sqrt{a}$ $\sqrt{2b}$ $\sqrt{3c}$

$\sqrt{\frac{1}{a}}$ $\sqrt{\frac{2}{b}}$ $\sqrt{\frac{3}{c}}$

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{2b}\cdot\sqrt{\frac{2}{b}}+3)^2\le[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2+(\sqrt{3c})^2][(\sqrt{\frac{1}{a}})^2+(\sqrt{\frac{2}{b}})^2+(\sqrt{\frac{3}{c}})^2]$$

$\therefore 18\le(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})$，最小值爲 18，此時 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{1}{a}}}=\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{\frac{2}{b}}}=\frac{\sqrt{3c}}{\sqrt{\frac{3}{c}}}$

$\therefore a=b=c$，又 $a+2b+3c=2$，$\therefore a=\frac{1}{3}$

11、設 $P(3, 1, 4), Q(1, 0, 2), R(-1, 2, 3)$，求

(1) $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上之投影量爲______；(2)又正射影爲__________。

答案：3；$(-2,-1,-2)$

解析：$\overrightarrow{PR}=(-4,1,-1)$，$\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,-2)$

(1) 投影量 $=|\overrightarrow{PR}|\cdot\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

(2)正射影 $=(\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|^2})\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{9}{9}\cdot(-2,\ -1,\ -2)=(-2,-1,-2)$。

12、$\triangle ABC$ 中，$A(3,1,7), B(0,7,5), C(5,3,6)$，

(1)若 $\overline{AD}$ 平分 $\angle A$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，則 D 點坐標爲________；

(2)若 $\overleftrightarrow{AE}$ 平分 $\angle A$ 的外角交直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E，則 E 點坐標爲________。

答案：$(\frac{35}{10},\frac{42}{10},\frac{57}{10})$；$(\frac{35}{4},0,\frac{27}{4})$

解析：$\overline{AB}=7,\ \overline{AC}=3$

$\because \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC},\ \overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\therefore D$ 點坐標爲：$\frac{3}{10}(0,7,5)+\frac{7}{10}(5,3,6)=(\frac{35}{10},\frac{42}{10},\frac{57}{10})$

E 點坐標爲：$\frac{-3}{4}(0,7,5)+\frac{7}{4}(5,3,6)=(\frac{35}{4},0,\frac{27}{4})$

13、在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面，有一光線通過點 $P(1,2,1)$，射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R。若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$ 則 R 點的坐標為________。

答案：(-2,-4,2)

解析：

P 對 xy 平面之對稱點為 $P'(1,2,-1)$，$\therefore 2\overrightarrow{P'O}=\overrightarrow{OR}\Rightarrow R(-2,-4,2)$

14、給予 $A(-15, 8, 5)$, $B(9, -1, 2)$, $P(4, 6, 15)$三點，試求 P 點到直線 AB 的距離=____________。

答案：

解析：

取 $\vec{a}=\overrightarrow{AP}=(19,\ -2,\ 10)$； $\overrightarrow{AB}=(24,\ -9,\ -3)=3(8,\ -3,\ -1)$，取 $\vec{b}=(8,\ -3,\ -1)$

Sol 一：

$$d(P,\overleftrightarrow{AB})=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & 10\\ -9 & -3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}10 & 19\\ -3 & 24\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}19 & -2\\ 24 & -9\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{24^2+(-9)^2+(-3)^2}}=13$$

Sol 二：

運用畢氏定理求

P 點到直線 AB 的距離為 $\sqrt{|\vec{a}|^2-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}}=\sqrt{(19^2+2^2+10^2)-\dfrac{(152+6-10)^2}{8^2+3^2+1^2}}$

$$=\sqrt{465-296}=\sqrt{169}=13$$