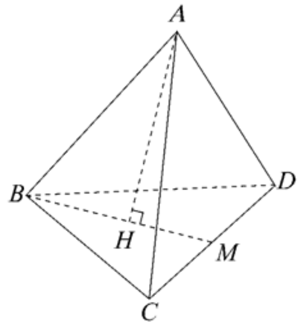
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：96.10.21
範圍	2-1 空間幾何(3)	班級		姓名	
		座號			

一、計算題(須過程) (每小題 5 分)

1、由四個全等正三角形所拼成的立體為正四面體．設正四面體 $ABCD$ 的各稜長為 a，求此正四面體的高及體積．

答案： $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$



解析： 正四面體$ABCD$，如圖

(1)設M為$\overline{CD}$的中點，並自A作底BCD的垂線，其垂足為H

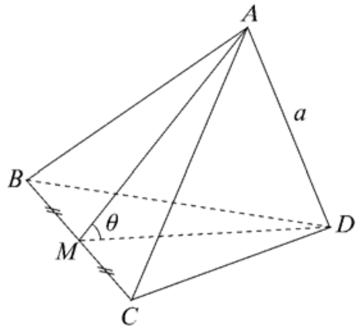
則H是$\triangle BCD$的重心　∴　$\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BM}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

故正四面體的高 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{a^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

(2)正四面體之體積$V=\dfrac{1}{3}$(底面積)$\times$(高)$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

2、求一個正四面體之相鄰兩面夾角的餘弦值．

答案： $\dfrac{1}{3}$



解析： 設 $ABCD$ 是一個邊長為 a 的正四面體，相鄰兩面 ABC 與 DBC 的夾角，取 $\overline{BC}$ 中點 M，並連接 $\overline{AM}$ 與 $\overline{DM}$，如圖

由$\triangle ABC$ 與$\triangle DBC$ 都是正三角形，知 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$，$\overline{DM}\perp\overline{BC}$

故 $\angle AMD$ 的角度就是此二面角的角度

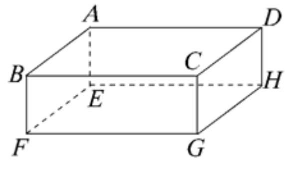
在$\triangle AMD$ 中，$\overline{AM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{AD}=a$

令 $\angle AMD=\theta$，由餘弦定理知 $\cos\theta=\dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}$

3、如下圖，一長方體 $ABCD$ - $EFGH$，已知 $\overline{AE}=1$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=5$，求

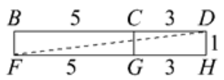
(1)一隻螞蟻從 F 點爬到 D 點，其爬行所經最短的距離．

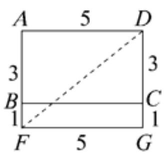
(2)一隻蚊子從 A 點飛到 G 點，其飛行所經最短的距離．

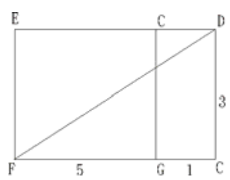


答案： (1) $\sqrt{41}$;(2) $\sqrt{35}$

解析：







(1)考慮把平面 $BCGF$ 與 $CGHD$ 展開攤平；$FGCB$ 與 $CDAB$ 展開攤平，如上圖

則爬行(前面+側面)之最短路線長為 $\sqrt{1^2+(5+3)^2}=\sqrt{65}$

爬行(前面+上面)之最短路線長為 $\sqrt{5^2+(1+3)^2}=\sqrt{41}$

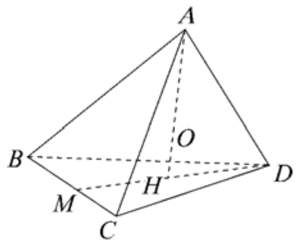
爬行(底面+側面)之最短路線長為 $\sqrt{3^2+(1+5)^2}=\sqrt{45}$

∴ 所求最短路線長為 $\sqrt{41}$

(2)飛行所經最短路線長就是對角線 $\overline{AG}$ 之長 $=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$

4、設 $ABCD$ 是邊長 a 的正四面體（三角錐），則其體積 =? 內切球半徑 =? 外接球半徑 =? （錐體體積 $=\dfrac{1}{3}$ 底面積 × 高）

答案： $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$, $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$, $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$



解析： (1)因H為△BCD之重心 ∴ $\overline{HD}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

∴ $\overline{AH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{HD}^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{1}{3}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

∴ 體積 $=\dfrac{1}{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2)\cdot(\dfrac{\sqrt{6}}{3}a)=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(2)令內切球球心O，內切球半徑r，連 $\overline{AO}$，$\overline{BO}$，$\overline{CO}$，$\overline{DO}$

則四面體$ABCD$之體積 $=O-ABC$體積 $+O-BCD$體積 $+O-ACD$體積 $+O-ABD$體積

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3=4\times(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r) \Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

(3)外接球球心即內切球球心，設外接球半徑 $=R$

則 $\overline{AO}+\overline{OH}=\overline{AH} \Rightarrow R+r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a \Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-\dfrac{\sqrt{6}}{12}a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$

5、點 $P(-2,\ 1,\ 5)$ 在 x 軸、y 軸、z 軸、xy 平面、yz 平面、zx 平面上的投影的空間坐標各為何？

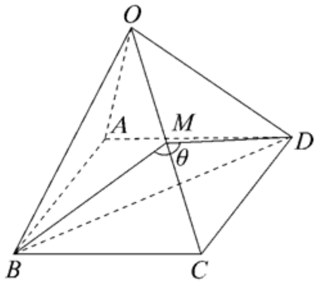
答案： $(-2,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 5)$，$(-2,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 5)$，$(-2,\ 0,\ 5)$；

解析： 點 $P(-2,\ 1,\ 5)$ 的投影依序為

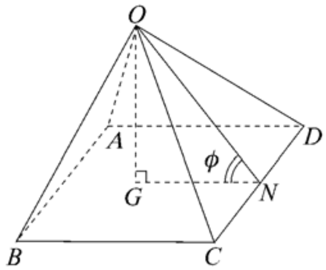
$(-2,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 5)$，$(-2,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 5)$，$(-2,\ 0,\ 5)$.

6、若正四角錐的側面是正三角形，求證：相鄰兩側面所成二面角是側面和底面所成二面角的二倍．

解析： 設四角錐各稜長為a



圖(一)



圖(二)

如圖(一)，取$\overline{OC}$中點M，因側面為正三角形

$\therefore\quad \overline{BM}\perp\overline{OC}$，$\overline{DM}\perp\overline{OC}\quad\Rightarrow\quad\angle BMD$為二面角$B$-$OC$-$D$的平面角

令$\angle BMD=\theta$，又$\overline{BM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{BD}=\sqrt{2}\,a$（□$ABCD$為正方形）

$\triangle BMD$中，由餘弦定理得$\cos\theta=\dfrac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\dfrac{1}{3}$

如圖(二)，自O作底面$ABCD$的垂直線，垂足G

作$\overline{GN}\perp\overline{CD}$交點$N$，則$\overline{ON}\perp\overline{CD}$（三垂線定理）

$\therefore\quad\angle ONG$為二面角$O$-$CD$-$AB$的平面角，令$\angle ONG=\phi$

又$\overline{ON}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{GN}=\dfrac{1}{2}a\quad\therefore\quad\cos\phi=\dfrac{\overline{GN}}{\overline{ON}}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos2\phi=2\cos^2\phi-1=2\times\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{1}{3}=\cos\theta\quad\therefore\quad2\phi=\theta$，得證