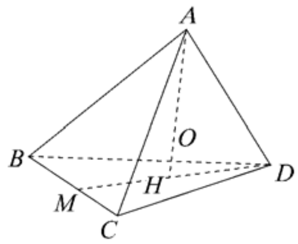
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：96.10.19</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-1 空間幾何(2)</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、計算題(須過程) (每小題 5 分)

1、 設一正四面體之稜長爲 a，過頂點作垂直底面的線段。求此正四面體的：

(1)高；(2)體積；(3) 外接球半徑 $R=?$ (4) 內切球半徑 $r=?$ (5)相鄰兩面夾角的餘弦值？

(6)二歪斜稜之距離。



答案：(1) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$；(2) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$；(3) $\frac{\sqrt{6}}{4}a$；(4) $\frac{\sqrt{6}}{12}a$；(5) $\frac{1}{3}$

解析：

(1) $\overline{HM}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

(2)四面體體積$=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot\overline{AH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 。

(4)令內切球球心O，內切球半徑r，連 $\overline{AO}$， $\overline{BO}$， $\overline{CO}$， $\overline{DO}$

則四面體$ABCD$之體積$=O-ABC$體積 $+O-BCD$體積 $+O-ACD$體積 $+O-ABD$體積

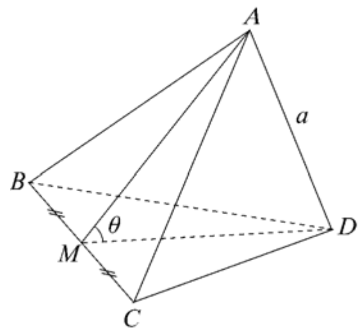
且$O-ABC$體積 $=O-BCD$體積 $=O-ACD$體積 $=O-ABD$體積

$\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=4\times(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r)$ $\Rightarrow$ 即 $4r=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，故 $r=\frac{1}{4}\overline{AH}=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

(3)外接球球心即內切球球心，外接球半徑 $=R$

則$\overline{AO}+\overline{OH}=\overline{AH}$ $\Rightarrow$ $R+r=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ $\Rightarrow$ $R=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{12}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$ (即$R=\frac{3}{4}\overline{AH}$)

(5)相鄰兩面面角的角度$\angle AMD$



在$\triangle AMD$中，$\overline{AM}=\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{AD}=a$

設$\angle AMD=\theta$

由餘弦定理知$\cos\theta=\dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$

(6)取$\overline{AD}$中點N，連$\overline{MN}$，則$\overline{MN}\perp\overline{BC},\overline{MN}\perp\overline{AD}$，

二歪斜稜之距離即$\overline{MN}$， $\overline{AN}=\frac{a}{2},\overline{MN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AN}^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

2、 設有一座金字塔，底面爲正方形，四個側面皆爲正三角形，各邊（稜）長爲 1，

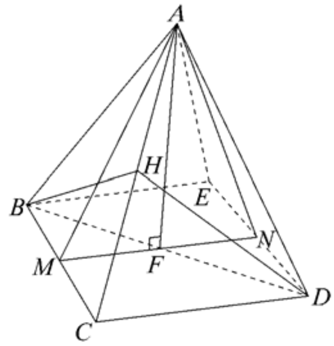
(1)設底面與側面的夾角爲 α，試求 $\sin\alpha$ 之值 .

(2)設相鄰兩側面的夾角爲 β，試求 $\tan\beta$ 之值 .

(3)試求此金字塔之高 .

答案： (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ；(2) $-2\sqrt{2}$ ；(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：



(1) ΔAMN 中，$\overline{MN}=\overline{CD}=1$，$\overline{AM}=\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ \cos\alpha=\cos\angle AMN=\frac{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) ΔABD 中，$\overline{BD}=\sqrt{2}$ ，$\overline{BH}=\overline{DH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

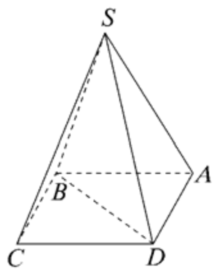
$$\therefore\ \cos\beta=\cos\angle BHD=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-1}{3}\Rightarrow\beta\text{ 為鈍角}$$

$$\tan\beta=-\sqrt{\sec^2\beta-1}=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta}-1}\ -\sqrt{\frac{1}{(-\frac{1}{3})^2}-1}=-2\sqrt{2}$$

(3) $\overline{AF}$ 垂直且平分 $\overline{MN}$ ，$\triangle AMF$ 為一直角三角形

$$\therefore\ \overline{AF}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3、如圖四角錐 S - $ABCD$ 的底面是邊長為 1 的正方形，側稜 $\overline{SB}$ 與底面 $ABCD$ 垂直，若 $\overline{SB}=\sqrt{3}$，則 $\sin\angle ASD$ =?



答案： $\frac{1}{\sqrt{5}}$

解析：

因 $\overline{SB}$ 垂直平面 $ABCD\Rightarrow\overline{SB}\perp\overline{BD}$

$\overline{SB}\perp\overline{BA}$，又 $ABCD$ 為正方形，$\overline{AD}\perp\overline{AB}\Rightarrow\overline{SA}\perp\overline{AD}$（三垂線定理），

$\overline{BD}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ ，$\overline{SB}=\sqrt{3}$

直角 ΔABD 中，$\overline{SD}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$

直角 ΔSAD 中，$\sin\angle ASD=\frac{\overline{AD}}{\overline{SD}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$