高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：96.10.11					
範圍	2-1 空間幾何	班級		姓名	
		座號			

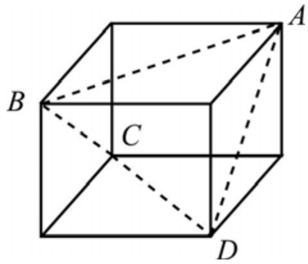
一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B)　設 L_1，L_2 為二直線，且 L_1，L_2 均垂直 L 於點 P，則下列各敘述何者恆不真？
(A) $L_1 = L_2$　(B) $L_1 // L_2$　(C) $L_1 \perp L_2$　(D) L_1 不垂直於 L_2　(E) L_1，L_2 可決定一平面

解析：∵ L_1 與 L_2 均垂直 L 於 P
∴①在平面上，$L_1 = L_2$；②在空間上，$L_1 \perp L_2$ 或 L_1 不垂直於 L_2 且 L_1 與 L_2 決定一平面。

2、(B)　一正立方體的八個頂點中有四個頂點，各頂點彼此之間的距離都是 1，則此正立方體的體積為 (A) $2\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(C)1 (D)2

解析：



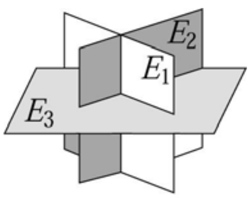
設邊長為 l，則取 4 個頂點 A, B, C, D 彼此距離均為 1，且為正四面體，$\therefore \overline{AB} = \sqrt{2}l = 1 \Rightarrow l = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，∴體積 $= \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3、(ADE)　(複選)下列敘述何者正確？（複選）
(A)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行
(B)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行
(C)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）
(D)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線
(E)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面（公垂面與該兩平面皆垂直的平面）

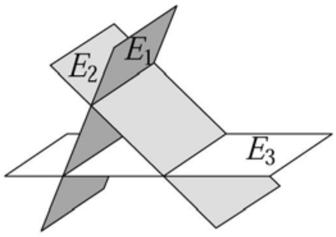
解析：(A)（○）。　(B)（╳）：可能為歪斜。　(C)（╳）：可能不在同一平面。
(D)（○）。　(E)（○）。

4、(CDE)　(複選)三相異平面兩兩相交於三條相異直線 l_1, l_2, l_3。試問下列選項哪些絕不可能發生？ (A) l_1, l_2, l_3 三線共交點　(B) l_1, l_2, l_3 不共面，但 $l_1 // l_2 // l_3$
(C) l_1, l_2, l_3 共平面　(D) l_1, l_2, l_3 兩兩相交，但三交點相異
(E) l_1, l_2, l_3 三線中兩兩都是歪斜線

解析：∵圖形如下，圖一表三直線 l_1, l_2, l_3 共交點，圖二表 l_1, l_2, l_3 兩兩平行



圖一



圖二

5、($\begin{smallmatrix}\text{BD}\\\text{E}\end{smallmatrix}$) 下列敘述何者正確？

(A)相異三點決定唯一平面　　(B)一線及線外一點，決定唯一平面

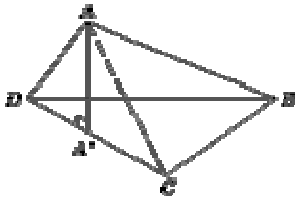
(C)不相交的兩直線，決定唯一平面　　(D)兩平行線，決定唯一平面

(E)相交於一點的兩直線，決定唯一平面

$\boxed{\text{解析}}$：(A)相異不共線三點，決定唯一平面，(C)歪斜線，不共平面

二、填充題 (每題 10 分)

1、 長方形紙 $ABCD$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=3$，沿著對角線$\overline{BD}$摺起，使 A 點在平面 BCD 上之投影恰在$\overline{CD}$邊長，則此時 A、C 兩點間的距離為_______。



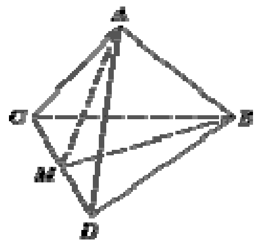
$\boxed{\text{答案}}$：$\sqrt{7}$

$\boxed{\text{解析}}$：

設 A 在平面 BCD 上之投影點為 A'，A' 在$\overline{CD}$邊上$\overline{AA'}$平面 BCD，又 $\overline{A'C}\perp\overline{CB}$

$\therefore \overline{AC}\perp\overline{CB}$，$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

2、 正四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=4$，若平面 ACD 與平面 BCD 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=$_______。



$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{1}{3}$

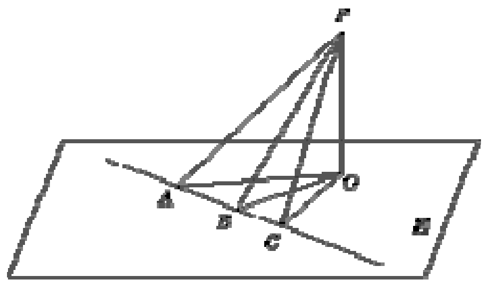
$\boxed{\text{解析}}$：

取$\overline{CD}$中點 M，連 $\overline{AM}, \overline{BM}$

$\therefore \overline{AM}\perp\overline{CD},\ \overline{BM}\perp\overline{CD},\ \overline{AM}=2\sqrt{3}=\overline{BM},\ \overline{AB}=4$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{12+12-16}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

3、 如圖，$\overline{OP}$垂直平面 E 於 O，且$\overline{OB}\perp\overline{AC}$於 B，$\overline{AB}=4,\ \overline{AC}=9$，則

(1)$\overline{OC}^2-\overline{OB}^2=$_______，(2)$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=$_______。



$\boxed{\text{答案}}$：25; 16

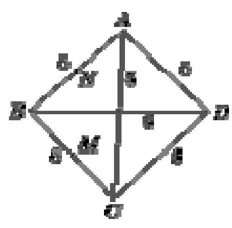
$\boxed{\text{解析}}$：

$\overline{OP}\perp$平面 $E,\ \overline{OB}\perp\overline{AC}$　$\therefore \overline{OC}^2-\overline{OB}^2=\overline{BC}^2=25$

$\because \overline{PB}\perp\overline{AB}$　$\therefore \overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{AB}^2=16$

4、 直三角錐 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5,\ \overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}=6$，若平面 ABC 與平面 ABD 之夾角為 α，平面 ABC 與平面 BCD 的夾角為 β，則 $\cos\alpha=$______，$\cos\beta=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{7}{32}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$



$\boxed{\text{解析}}$：$\overline{BC}$之中點 M，$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ 且

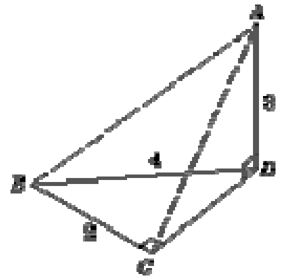
$\overline{AM} \perp \overline{BC},\ \overline{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ 且 $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ ，$\beta = \angle AMD$，$\cos\beta = \dfrac{16+27-25}{2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

過 C 作 $\overline{CN} \perp \overline{AB}$ 於 N $\because \triangle ABC \cong \triangle ABD$，$\therefore \overline{DN} \perp \overline{AB}$ $\therefore \overline{BN} = 3.6, \overline{CN} = \overline{DN} = 4.8$

$\therefore \alpha = \angle CND$ $\quad \therefore \cos\alpha = \dfrac{(\frac{24}{5})^2 + (\frac{24}{5})^2 - 36}{2\cdot(\frac{24}{5})(\frac{24}{5})} = \dfrac{7}{32}$

5、 三角錐 $ABCD$ 中，$\overline{AD} \perp$ 平面 BCD 且 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ ，若 $\overline{AD} = 3,\ \overline{BD} = 4,\ \overline{BC} = 2$ ，則 $\overline{AC} =$_______；又平面 ABC 與平面 DBC 之夾角爲 θ ，則 $\sin\theta =$_______ 。

答案：$\sqrt{21}$； $\dfrac{3}{\sqrt{21}}$



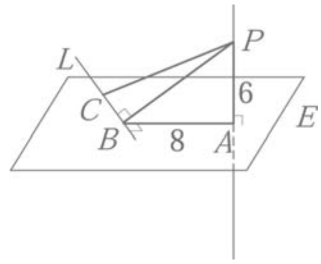
解析：

$\because \overline{CD} = 2\sqrt{3}$ ，$\therefore \overline{AC} = \sqrt{9+12} = \sqrt{21}$

$\because \overline{AC} \perp \overline{BC}$ $\quad \therefore \theta = \angle ACD$ ，$\therefore \sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$

6、 自平面 E 外一點 P 作 $\overline{PA} \perp E$，L 爲 E 上的直線，作 $\overline{AB} \perp L$，C 爲 L 上的一點，已知 $\overline{AP} = 6,$ $\overline{AB} = 8,\ \ \overline{BC} = 24$，求 $\overline{PC} =$________ 。

答案：26



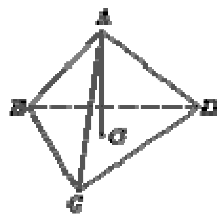
解析：

$\because \overline{PA} \perp E$ 且 $\overline{AB} \perp L$，$\therefore \overline{PB} \perp L$，$\therefore \overline{PB} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\because \overline{BC} = 24$，$\therefore \overline{PC} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$

7、正四面體 $ABCD$，$\overline{AB} = 2$ ，則正四面體的高爲_______ ，又其體積爲_______ 。

答案：$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$;$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



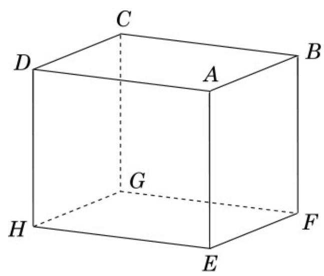
解析：

$\overline{AG} \perp$ 平面 BCD，G 爲△BCD 的重心

$\therefore \overline{BG} = \sqrt{3} \times \dfrac{2}{3},\ \overline{AB} = 2 \quad \therefore \overline{AG} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

體積 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

8、 下圖爲一單位正立方體 $ABCDEFGH$，(即稜長 1)。則四面體 $ACFH$ 的表面積爲________ 。



答案：$\sqrt{12}$

解析：由圖知四面體 $ACFH$ 爲正四面體，$\overline{AC} = \sqrt{2}$

$\therefore$表面積 $= 4 \times \left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2\right] = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

9、 有一四面體 $OABC$，它的一個底面 ABC 是邊長為 4 的正三角形，且知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$；如果直線 OA 與直線 BC 間的公垂線段長(亦即此兩直線間的距離)是 $\sqrt{3}$，則 $a=$______

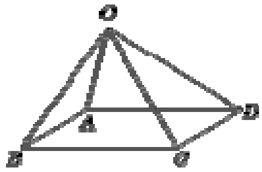
答案：$\dfrac{8}{3}$

解析：

取 $\overline{BC}$ 的中點 M,作 $\overline{MN}\perp\overline{OA}$,則 $\overline{MN}$ 為 $\overline{OA}$ 的公垂線段長，$\therefore \overline{MN}=\sqrt{3}$

$\because \overline{AM}=2\sqrt{3},\ \overline{MN}=\sqrt{3}$，$\therefore \angle OAM=30^\circ$，$\cos 30^\circ=\dfrac{a^2+12-(a^2-4)}{2\cdot a\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=\dfrac{8}{3}$

10、如圖，有一個稜長均為 2 的金字塔形，設其正三角形的斜面中相鄰之二面的夾角為 α，正三角形的斜面與正方形的底面之夾角為 β，則 $\cos\alpha=$_______，$\cos\beta=$_______。



答案：$\dfrac{-1}{3}$；$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析：

取 $\overline{OC}$ 中點 M　$\therefore \overline{BM}\perp\overline{OC},\ \overline{DM}\perp\overline{OC}$

$\therefore \angle BMD=\alpha$，$\overline{BM}=\sqrt{3},\ \overline{DM}=\sqrt{3},\ \overline{BD}=2\sqrt{2}$，$\therefore \cos\alpha=\dfrac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{-1}{3}$

取 $\overline{CD}$ 中點 E，$\overline{AB}$ 中點 F　$\therefore \overline{EF}\perp\overline{CD},\ \overline{OE}\perp\overline{CD}$

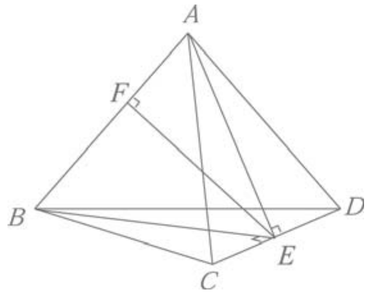
$\therefore \beta=\angle OEF,\ \overline{OE}=\sqrt{3},\ \overline{EF}=2,\ \overline{OF}=\sqrt{3}$，

$\therefore \cos\beta=\dfrac{3+4-3}{2\sqrt{3}\times 2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11、設一正四面體之稜長為 a，則

(1)任意相鄰兩面之夾角為 θ，求 $\cos\theta=$？

(2)求不共頂點的任兩稜中點連線的長？



答案：(1)$\dfrac{1}{3}$　(2)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

解析：

(1)E, F 分別為 $\overline{CD}$，$\overline{AB}$ 之中點，則 $\angle AEB=\theta$，$\because \triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 皆為正△，

$\therefore \overline{AE}=\overline{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$，$\cos\theta=\dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-a^2}{2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}a)\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}a)}=\dfrac{1}{3}$

(2)$\overline{EF}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$