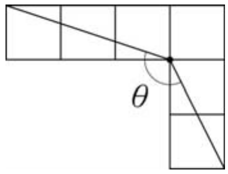
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.10.04					
範圍	1-4 平面向量內積	班級		姓名	
		座號			

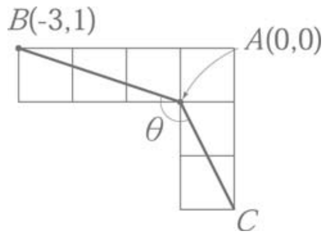
一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 如圖每一小格均爲正方形，求 $\cos\theta=$？



(A)$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C)$-\dfrac{1}{2}$ (D)$\dfrac{1}{2}$ (E)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：自訂坐標 $A(0,0), B(-3,1), C(1,-2)$



$\therefore \overrightarrow{AB}=(-3,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,\ -2)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2、(C) 設 $\vec{a}=(2,\ell)$ 在直線 $L:2x-6y=7$ 上的正射影爲(3,1)，則 $\ell=$(A)2 (B)3 (C)4 (D)5 (E)6

解析：直線 $L:2x-6y=7$ 法向量 $\vec{n}=(2,-6)=2(1,-3)\Rightarrow$ 直線 L 之方向向量爲(3,1)

$$\therefore [\frac{(2,\ell)\cdot(3,1)}{(\sqrt{10})^2}](3,1)=(3,1) \quad \therefore \frac{6+\ell}{10}=1 \quad \therefore \ell=4$$

3、(D) 設 $x>0$ ，$y>0$ ，則 $(x+4y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})$ 之最小值爲 (A)8 (B)16 (C)17 (D)25 (E)289

解析：$(x+4y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})=[(\sqrt{x})^2+(2\sqrt{y})^2][(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{2}{\sqrt{y}})^2]$

柯西不等式 $[(\sqrt{x})^2+(2\sqrt{y})^2][(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{2}{\sqrt{y}})^2]\ge(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{y}\cdot\frac{2}{\sqrt{y}})^2$

$(x+4y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})\ge(1+4)^2$ ，即 $(x+4y)(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})$ 之最小值爲 25

4、(D) 設 $P(x,y)$在直線 $3x-4y-5=0$ 上，則 $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$ 之最小值爲 (A)0 (B)1 (C)$\sqrt{2}$ (D)2 (E)4

解析：取 $Q(-3,-1)$，$P(x,y)\Rightarrow \overline{PQ}=\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}\text{ 之最小值}=d(Q,L)=\frac{|-9+4-5|}{5}=2$$

二、填充題 (每題 10 分)

1、設△ABC 的三頂點爲 $A(6,20), B(13,3), C(-4,-4)$，則 $\angle A=$______。

答案：45°

解析：$\overrightarrow{AB}=(7,-17)$，$\overrightarrow{AC}=(-10,-24)$，$\overline{AB}=13\sqrt{2}$，$\overline{AC}=26$

$$\therefore \cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{338}{26\times13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \quad \angle A=45°$$

2、設直線 L 通過$(-2,-3)$且與$\overrightarrow{u}=(1,2)$垂直，則直線 L 的方程式為______。

答案：$x+2y+8=0$

解析：直線 L 與 $\overrightarrow{u}=(1,2)$ 垂直 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{u}=(1,2)$ 為直線 L 法向量

設 $L: x+2y=k$ 過$(-2,-3)$　$\therefore x+2y+8=0$

3、已知點 $A(2,5)$及一直線 $L: 4x+3y+2=0$ ，試求

(1)A到L的距離為_____，(2)A在L上的正射影為______，(3)A對於L的對稱點為______。

答案：5; $(-2,2)$; $(-6,-1)$

解析：(1) $d(A,L)=\dfrac{|8+15+2|}{5}=5$

(2)A 在 L 上的正射影為 $(2,5)-5\cdot(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})=(-2,2)$

(3)對稱點 $(2,5)-2\times5\times(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})=(-6,-1)$

4、設$\overrightarrow{a}=(2,-1)$, $\overrightarrow{b}=(x+1,x-1)$ 且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 $45°$ ，則 $x=$______或______。

答案：2; $-\dfrac{1}{2}$

解析：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x+3=|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\cos45°=\sqrt{5}\sqrt{2x^2+2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$8x^2-12x-8=0$， $(2x+1)(x-2)=0$， $x=2$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

5、設$\overrightarrow{a}=(2,-6)$ ， $\overrightarrow{b}=(1,2)$ ，則

(1) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的投影量為______，(2) $\overrightarrow{a}$ 對於 $\overrightarrow{b}$ 的對稱向量為______。

答案：$-2\sqrt{5}$; $(-6,-2)$

解析：　(1) $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{-10}{\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}$

(2) $2(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2})\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=2\times(-2\sqrt{5})\times\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}-(2,-6)=(-6,-2)$

6、$A(6,6)$, $B(3,5)$，在直線 $x+2y=8$ 上任取一點 P 使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 最小，則 P 點坐標為______。

答案：$(3,\dfrac{5}{2})$

解析：$x+2y=8$ ，設 P 點參數式為 $\begin{cases}x=0+2t\\y=4-t\end{cases}$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(2t-6)^2+(-2-t)^2+(2t-3)^2+(-1-t)^2$

$=10t^2-30t+50=10(t-\frac{3}{2})^2+\frac{55}{2}$　$\therefore t=\frac{3}{2}$時$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$最小，$P$點爲$(3,\frac{5}{2})$

7、直線$L_1:\sqrt{3}x+2y=5$，$L_2:y=3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$，則直線$L_1$與$L_2$的夾角爲______，或______。

答案：$60°$；$120°$

解析：$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3},2)\cdot(3\sqrt{3},-1)}{\sqrt{7}\sqrt{28}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$　$\therefore\theta=60°$，兩線夾角爲$60°$或$120°$

8、設$\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(2,1)$，則$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=$______，又$\vec{a}$, $\vec{b}$之夾角爲θ，則$\cos\theta=$_____。

答案：12; $\frac{4}{5}$

解析：$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=(5,4)\cdot(0,3)=12$，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

9、過$P(0,-1)$且與直線L: $3x+4y-12=0$交成$45°$之直線方程式爲____________________。

答案：$x-7y-7=0$或$7x+y-1=0$

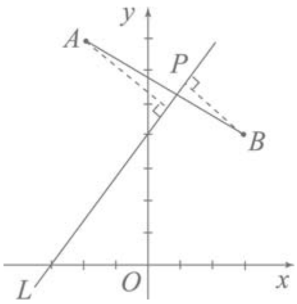
解析：設直線$y=mx-1\Rightarrow mx-y-1=0$，其斜率爲$m$

$\therefore\frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\cos45°\Rightarrow|3m-4|=5\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$9m^2-24m+16=\frac{25}{2}(m^2+1)\Rightarrow 7m^2+48m-7=0$，$\therefore m=\frac{1}{7}$或$-7$

$\therefore y=\frac{1}{7}x-1$或$y=-7x-1$，即$x-7y-7=0$或$7x+y-1=0$。

10、設$A(-2,7)$, $B(3,4)$, L: $4x-3y+12=0$，若L交$\overline{AB}$於P，求$\overline{AP}:\overline{BP}$之比值_____________。



答案：

如圖$\overline{AP}:\overline{BP}=d(A,L):d(B,L)=\frac{|-8-21+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}:\frac{|12-12+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=17:12=\frac{17}{12}$

11、設△ABC之三頂點爲$A(2,0)$, $B(4,-1)$, $C(6,7)$，試求△ABC之面積。

答案：$\overrightarrow{AB}=(4-2,-1-0)=(2,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(6-2,7-0)=(4,7)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times2+(-1)\times(-1)=5$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4+7\times7=65$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4+(-1)\times7=1$，

故△ABC之面積$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AB}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times65-1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{324}=9$

當然△ABC之面積$=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}2&-1\\4&7\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|14+4|=9$最快

12、設 G 爲△ABC 之重心，且 $\overline{GA}=2,\overline{GB}=\sqrt{2},\overline{GC}=\sqrt{3}$

(1)求 $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$　(2)求 $\cos\angle BGC$　(3)求△ABC 之面積。

$\boxed{答案}$：(1)$\because G$ 爲△ABC 之重心，$\therefore \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|^2=\left|-\overrightarrow{GA}\right|^2$

$\therefore \left|\overrightarrow{GB}\right|^2+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\left|\overrightarrow{GC}\right|^2=\left|\overrightarrow{GA}\right|^2 \Rightarrow 2+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+3=4$　，$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=-\dfrac{1}{2}$

(2)$\because \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\left|\overrightarrow{GB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{GC}\right|\cdot\cos\theta$，$\therefore \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \cos\theta=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$

(3)$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{24}}=\sqrt{\dfrac{23}{24}}$

$\therefore \triangle ABC=3\cdot\triangle GBC=3\cdot\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{GB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{GC}\right|\cdot\sin\theta=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{23}{24}}=\dfrac{3\sqrt{23}}{4}$