高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.09.27					
範圍	1-2 向量幾何(2)	班級		姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1、 設 $|\overrightarrow{a}|=4$， $|\overrightarrow{b}|=5$， $|\overrightarrow{c}|=6$，若 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$____，又 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=$_____。

答案：$-\dfrac{5}{2}$； $-\dfrac{77}{2}$

解析： $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|-\overrightarrow{c}|$， $|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{c}|^2$ ， $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-\dfrac{5}{2}$ ，

又 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|^2=\overrightarrow{0}\Rightarrow|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2+|\overrightarrow{c}|^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$ ，

$\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\dfrac{-|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{c}|^2}{2}=-\dfrac{77}{2}$

2、 設 $|\overrightarrow{a}|=3$， $|\overrightarrow{b}|=1$ ，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 $30°$，若 $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 垂直，則 $t=$______。

答案：$-2\sqrt{3}$

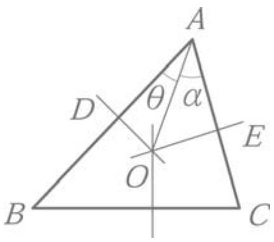
解析： $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos30°=3\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$,

$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 垂直 $\Rightarrow(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=0\Rightarrow|\overrightarrow{a}|^2+t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}=0$ ， $|\overrightarrow{a}|^2+t\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=0$ ， $t=-2\sqrt{3}$

3、 設△ABC 中，$\overline{BC}=2\sqrt{7}$, $\overline{AC}=4$, $\overline{AB}=6$ ，O 為△ABC 之外心，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 $(x,y)=$_______________。

答案：$(\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{6})$

解析：



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A=6\cdot4\cdot\dfrac{36+16-28}{2\cdot6\cdot4}=12$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=18$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\alpha=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=8$

又 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

$$\therefore\begin{cases}36x+12y=18\\12x+16y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{9}\\y=\dfrac{1}{6}\end{cases},\ \therefore(x,y)=(\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{6})$$

4、 平行四邊形 $ABCD$ 中，M 在 $\overline{CD}$ 上，且 $\overline{MC}:\overline{MD}=2:1$，設 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 且 $\overrightarrow{AM}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}$，則數對 $(\alpha,\beta)=$______。

$\boxed{答案}$：$(\frac{1}{3},1)$

$\boxed{解析}$：$\because \overline{MC}:\overline{MD}=2:1$，$\therefore \overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$，$(\alpha,\beta)=(\frac{1}{3},1)$

5、 $ABCD$ 為平行四邊形，且 $\angle A=60°$，$\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=3$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$__________，(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$__________，(3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$__________。

$\boxed{答案}$：3；7；5

$\boxed{解析}$：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60°=2\times 3\times\frac{1}{2}=3$

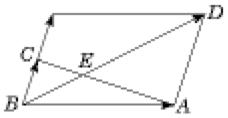
(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=4+3=7$

(3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^{2-}=3^2-2^2=5$

6、 設 A, B, C 為平面上不共線的相異三點，且 $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$，設 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 E，$\overrightarrow{BE}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$，則 $\alpha=$______，$\beta=$______。

$\boxed{答案}$：$\frac{1}{3}$；$\frac{2}{3}$

$\boxed{解析}$：



$\because \overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 E　$\therefore \overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BD}=k(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC})=k\overrightarrow{BA}+2k\overrightarrow{BC}$

$\because C\text{-}E\text{-}A$ 三點共線　$\therefore k+2k=1$　$\therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{2}{3}$

7、 設 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=7$，$3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角 $\theta=$______，又 $|2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}|=$______。

$\boxed{答案}$：$60°$；$\sqrt{11}$

$\boxed{解析}$：$3\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$　$\therefore |3\vec{a}+\vec{b}|^2=|-\vec{c}|^2$

$\therefore 9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$　$\therefore 6\vec{a}\cdot\vec{b}=15\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15}{6}$，$\cos\theta=\frac{\frac{15}{6}}{1\times 5}=\frac{1}{2}$　$\therefore \theta=60°$

$|2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}|^2=|(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(-\vec{a}+2\vec{b})|^2=|-\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=1-10+20=11\Rightarrow |2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{11}$

8、 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，則(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$________。 (2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$________。

答案：(1) 30 (2) -19

解析：(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos C=|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|}$

$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)=\frac{1}{2}(7^2+6^2-5^2)=30$$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)=-\dfrac{1}{2}(49+25-36)=-19$

9、平面上 A, B, C 三點共線，O 爲不在此線上之任一點，若 $(2t+1)\overrightarrow{OA}+(3t+4)\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求實數 $t=$____。

答案：-2

解析：$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2t+1}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{3t+4}{5}\overrightarrow{OB}$，$\because C, A, B$ 共線，$\therefore -\dfrac{2t+1}{5}-\dfrac{3t+4}{5}=1\Rightarrow t=-2$

10、在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=120°$, $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$ 且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，求 $\overline{AC}=$________。

答案：$\sqrt{13}$

解析：$\overline{AC}^2=|\overrightarrow{AC}|^2=9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+4|\overrightarrow{AD}|^2=9+12\cdot1\cdot2\cdot(-\dfrac{1}{2})+16=13$

11、G 爲$\triangle ABC$ 的重心，若 $|\overrightarrow{GA}|=3$，$|\overrightarrow{GB}|=4$，$|\overrightarrow{GC}|=5$，則

(1) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}=$__________________，(2) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=$_____________

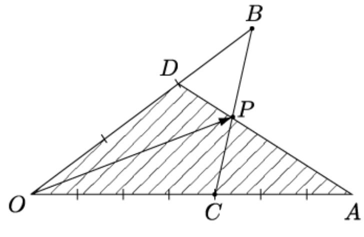
答案：(1) -9 (2) -16

解析：$\because \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|^2=|-\overrightarrow{GB}|^2$ $\therefore \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GC}=-9$

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{GB}\cdot(-\overrightarrow{GB})=-16$

12、設 O, A, B 三點不共線，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, C 在 $\overline{OA}$ 上且 $\overline{OC}:\overline{CA}=4:3$, D 在 $\overline{OB}$ 上且 $\overline{OD}:\overline{DB}=2:1$。$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 P，

(1) $\overline{AP}:\overline{PD}=$________；(2)試以 $\vec{a}, \vec{b}$ 表 $\overrightarrow{OP}=$____________。



答案：(1) $9:4$ (2) $\dfrac{4}{13}\vec{a}+\dfrac{6}{13}\vec{b}$

解析：由$\triangle OAD$ 及截線 $\overline{BC}$，三個分點 C, P, B。

由孟氏定理，知 $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CA}}\cdot\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\cdot\dfrac{\overline{DB}}{\overline{BO}}=1\Rightarrow\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}\cdot\dfrac{1}{3}=1$，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\dfrac{9}{4}$，即 $\overline{AP}:\overline{PD}=9:4$

故$\overrightarrow{OP}=\dfrac{4\overrightarrow{OA}+9\overrightarrow{OD}}{9+4}=\dfrac{4}{13}\vec{a}+\dfrac{9}{13}(\dfrac{2}{3}\vec{b})=\dfrac{4}{13}\vec{a}+\dfrac{6}{13}\vec{b}$

13、設$\vec{U}$ ，$\vec{V}$ 不平行，若$(x-y+2)\vec{U}+(x+y-6)\vec{V}=\vec{0}$ ，則數對$(x，y)=$__________ 。

$\boxed{答案}$：$(x，y)=(2，4)$

$\boxed{解析}$

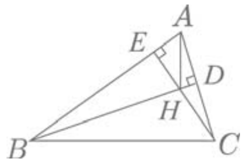
若$(x-y+2)\vec{U}+(x+y-4)\vec{V}=\vec{0}$ 且$\vec{U}$ ，$\vec{V}$ 不平行

$\therefore \begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow x=2，y=4$，故$(x，y)=(2，4)$

14、設△ABC 中，$\overline{BC}=2\sqrt{7}\,,\overline{AC}=4\,,\overline{AB}=6$，設 H 為△ABC 之垂心，則

(1) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=$______________；$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____________；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____________。

(2)若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求數對 $(x,y)=$_______________。



$\boxed{答案}$：(1)12　(2) $(\dfrac{1}{9},\dfrac{2}{3})$

$\boxed{解析}$：

(1) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=12$

(2)$\because$ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x\cdot|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

$\therefore \begin{cases} 36x+12y=12 \\ 12x+16y=12 \end{cases}$，解得 $x=\dfrac{1}{9},y=\dfrac{2}{3}$ ；即 $(x,y)=(\dfrac{1}{9},\dfrac{2}{3})$

15、設△ABC 中，$\overline{AB}=4$ ，$\overline{BC}=5$ ，$\overline{AC}=6$ ，設 I 為△ABC 之內心，且 $\overline{AI}$ 延長線交 $\overline{BC}$ 於 D，則：

(1)若 $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ，求數對 $(\alpha,\beta)=$_______________。

(2)若 $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求數對 $(x,y)=$_______________。

$\boxed{答案}$：(1) $(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5})$ (2) $(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{15})$

$\boxed{解析}$：

(1) I 為△ABC 之內心，且 $\overline{AI}$ 延長現交 $\overline{BC}$ 於 D

$\Rightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{AC}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\dfrac{6}{4+6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{4+6}\overrightarrow{AC}\Rightarrow(\alpha,\beta)=(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5})$

(2) $\overrightarrow{AI}=\dfrac{6}{4+5+6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{4+5+6}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AC}$