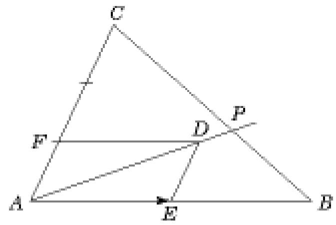
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：96.09.20					
範圍	1-2 向量幾何(1)	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

一、單一選擇題 (每題 0 分)



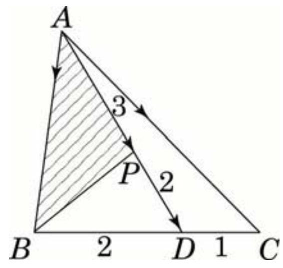
1、(B) A, B, C 為平面上不共線三點，令 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，設 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 P，則 $\overline{AD}:\overline{AP}$ 之值為 (A)$\frac{2}{3}$ (B)$\frac{5}{6}$ (C)1 (D)$\frac{6}{5}$ (E)$\frac{3}{2}$

解析：

$\because A, D, P$ 三點共線，$\therefore \overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AD}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}$

$\because P, B, C$ 三點共線 $\therefore \frac{k}{2}+\frac{k}{3}=1$，$\therefore k=\frac{6}{5}$ $\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{5}{6}$

2、(C) 設 ABC 為坐標平面上一三角形，P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，則 $\frac{\triangle ABP\text{面積}}{\triangle ABC\text{面積}}$ 等於 (A)$\frac{1}{5}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{2}{5}$ (D)$\frac{1}{2}$ (E)$\frac{2}{3}$



解析：

令 $\overrightarrow{AD}=t\,\overrightarrow{AP}$，則得：$\overrightarrow{AD}=t(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC})=\frac{t}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2t}{5}\overrightarrow{AC}$

B, D, C 三點共線，$\frac{t}{5}+\frac{2t}{5}=1\Rightarrow t=\frac{5}{3}$，即

$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AP}\Rightarrow \overrightarrow{AP}:\overrightarrow{AC}=3:2$，$\overrightarrow{BD}:\overrightarrow{DC}=2:1$，則

$$\frac{\triangle ABP\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}}=\frac{\frac{3}{5}\triangle ABD\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}}=\frac{\frac{3}{5}(\frac{2}{3}\triangle ABC\text{的面積})}{\triangle ABC\text{的面積}}=\frac{\frac{2}{5}\triangle ABC\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}}=\frac{2}{5}$$

4、(ACE) (複選)下列哪一個條件使P點在線段 $\overline{AB}$ 上？（複選）

(A)$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ (B)$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OP}$ (C)$3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

(D)$3\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ (E)$\overrightarrow{OA}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

解析：

$\because P$ 在線段 $\overline{AB}$ 上，$\therefore P, A, B$ 三點共線$\Rightarrow$係數和$=1$

(A)（○）：$\because \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

(B)（╳）：$\because \overrightarrow{OA}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OP}, \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$，$\therefore A$ 在 $\overline{BP}$ 上，$\therefore P$ 不在 $\overline{AB}$ 上。

(C)（○）：$\because \overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$, $\therefore \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

(D)（╳）：$\because \overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，$\therefore -\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\neq 1$

(E)（○）：$\because \overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，$\therefore \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}=1$

二、填充題 (每題 10 分)

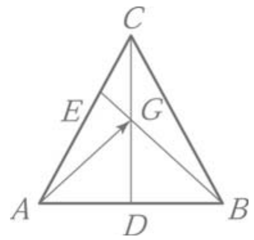
1、若 D 爲$\triangle ABC$ 內部一點，且$\triangle ABD$ 的面積：$\triangle ACD$的面積$=2:3$，又 $\overline{AD}$ 之延長線與 $\overline{BC}$ 相交於 E，則 $\overrightarrow{AE}=$ _____ $\overrightarrow{AB}+$ _____ $\overrightarrow{AC}$ 。

答案：$\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{2}{5}$

解析：

$\because \triangle ABD$ 的面積：$\triangle ACD$ 的面積$=2:3$，$\therefore \overline{BE}:\overline{CE}=2:3$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

2、$\triangle ABC$ 中，D 是 $\overline{AB}$ 之中點，E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AE}:\overline{CE}=2:1$，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 G，設 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，求 $(x,y)=$ ________ 。



答案：$(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2})$

解析：

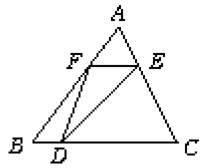
$\because \overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$=2x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC}\cdots\cdots①$

$=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}y\overrightarrow{AE}\cdots\cdots②$

由①②得$\begin{cases}2x+y=1\\ x+\dfrac{3}{2}y=1\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$\therefore (x,y)=(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2})$ 。

3、在$\triangle ABC$ 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別取 D, E, F 三點，使 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$（如圖）。設 G 爲$\triangle DEF$ 的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ，則 $\alpha=$ ______，$\beta=$ ______ 。



答案：$\dfrac{17}{45}$; $\dfrac{8}{45}$

解析：

因爲 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$ $\quad\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$ $\quad\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

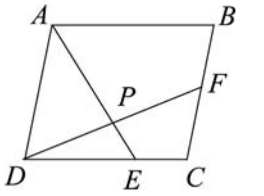
$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}\quad\therefore\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\because G$ 爲$\triangle DEF$ 的重心

$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{3}[(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}]$

$\therefore\ \overrightarrow{AG}=\frac{17}{45}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{45}\overrightarrow{AC}\quad\therefore\quad\alpha=\frac{17}{45},\ \beta=\frac{8}{45}$

4、如圖，$ABCD$ 是平行四邊形，$\overline{BF}:\overline{FC}=1:1$, $\overline{CE}:\overline{ED}=1:2$， $\overline{AE}$ 交 $\overline{DF}$ 於 P，設 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ ，求數對 $(x,y)=$________。



$\boxed{\text{答案}}$：$(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$

$\boxed{\text{解析}}$：

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\therefore\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y(\overrightarrow{BE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA})=(x-\frac{1}{3}y)\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BE}$

$\because A, P, E$ 共線$\Rightarrow(x-\frac{1}{3}y)+y=1$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BF}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BP}=x\cdot(\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BF})+y\cdot2\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{BD}+(-2x+2y)\overrightarrow{BF}$

$\because D, P, F$ 共線，$\therefore x+(-2x+2y)=1$

由(1)(2)得$\begin{cases}x+\frac{2}{3}y=1\\-x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{3}{4}\\x=\frac{1}{2}\end{cases}$，故$(x,y)=(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})$ 。

5、$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$ ，若 I 爲$\triangle ABC$ 之內心，O 爲平面上任一點，則 $\overrightarrow{OI}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$ ，則$\alpha=$______, $\beta=$______, $\gamma=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{3}{9}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{9}$

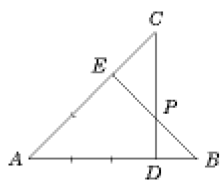
$\boxed{\text{解析}}$：

I 爲$\triangle ABC$ 的內心$\Rightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

$\therefore\overrightarrow{OI}=\frac{3}{2+3+4}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{2+3+4}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{2+3+4}\overrightarrow{OC}$ ，$\therefore\alpha=\frac{3}{9},\ \beta=\frac{4}{9},\ \gamma=\frac{2}{9}$

6、如圖$\triangle ACD$ 中 E 在 $\overline{AC}$ 上且 $2\overline{CE}=\overline{AE}$，$B$ 在 $\overline{AD}$ 延長線上且 $3\overline{BD}=\overline{AD}$， 設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 P，則

(1) $\overline{DP}:\overline{CP}=$______，(2) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，則數對$(x,y)=$______。



答案：(1)$1:2$　(2)$(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

解析：

(1)由孟氏定理得知 $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}}=1\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}}=1\Rightarrow\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}}=\frac{1}{2}$，即$\overline{DP}:\overline{CP}=1:2$

(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

7、設 H 爲△ABC 的垂心(即三高的交點)，其中$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=3$，若

$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則(1) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=$______，(2) $\alpha=$______，$\beta=$______。

答案：8; $\frac{8}{10}$; $\frac{1}{10}$

解析：

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3^2+4^2-3^2}{2}=8$$

∵H 爲△ABC 的垂心　∴ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$

∵ $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$　∴ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，得$8=9\alpha+8\beta$……❶

又 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$，得$8=8\alpha+16\beta$……❷

由　❶❷$\Rightarrow\alpha=\frac{8}{10}$，$\beta=\frac{1}{10}$

8、設 G 爲△ABC 的重心，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=2$，$\overline{AB}=4$，若$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則

(1)　$\alpha=$__________，(2)　$\beta=$__________。

答案：$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$

解析：,

G 爲△ABC 的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$　$\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$

9、設△ABC 中，其中$\overline{AB}=6$，$\overline{CA}=4$，$\angle BAC=60°$，D 在$\overline{BC}$ 上，，且$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$

(1)若$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\alpha=$______，$\beta=$______。

(2) $\overline{AD}=$____________________。

答案：(1) $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$　(2) $\frac{2\sqrt{37}}{3}$

解析：

(1) $\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}\Rightarrow\overline{BD}:\overline{DC}=1:2\Rightarrow$　$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(2) 因爲 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=6\times4\times\frac{1}{2}=12$

且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|^2=|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}|^2$

$$=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{1}{9}\times 6^2+\frac{4}{9}\times 12+\frac{4}{9}\times 4^2=\frac{148}{9}\qquad\Rightarrow|\overrightarrow{AD}|=\frac{2\sqrt{37}}{3}$$

10、設 K 為$\triangle ABC$ 的外心，$\overline{BC}=3$, $\overline{CA}=4$, $\overline{AB}=3$，若 $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ，則

(1) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=$__________，(2) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________。

答案：(1)$\frac{9}{2}$　(2)8

解析：

K 為$\triangle ABC$ 的外心，$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{9}{2}$, $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4^2}{2}=8$