高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.06.18					
範圍	3-3 倍角、半角公式	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 設 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ ，且$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ ，則 $\cos\frac{\theta}{2}=$

(A) $-\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$ (E) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

【解答】(E)

【詳解】

$\because\ \pi<\theta<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}\ \therefore\ \cos\frac{\theta}{2}<0$ 且 $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\Rightarrow\ \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

※2. $\cos5°\cos10°\cos20°\cos40°=$ (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{-1}{16}$ (C) $\frac{\cos50°}{8}$ (D) $\frac{\cos10°}{16\sin5°}$ (E)以上皆非

【解答】(D)

【詳解】

設 $P=\cos5°\cos10°\cos20°\cos40°$

則$(2\sin5°)P=2\sin5°(\cos5°\cos10°\cos20°\cos40°)$

$=2(\sin5°\cos5°)\cos10°\cos20°\cos40°$

$=(\sin10°\cos10°)\cos20°\cos40°$

$=(\frac{1}{2}\sin20°)\cos20°\cos40°$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin40°)\cos40°$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin80°)$

$=\frac{1}{8}\sin80°$

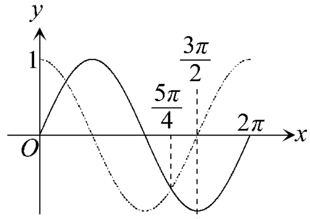
$\therefore\ P=\frac{\sin80°}{16\sin5°}=\frac{\cos10°}{16\sin5°}$

3. 設$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ，則$\sqrt{1+\sin2\theta}-\sqrt{1-\sin2\theta}=$

(A) $2\sin\theta$ (B) $2\cos\theta$ (C) $2\sin2\theta$ (D) $-2\sin\theta$ (E) $-2\cos\theta$

【解答】(E)

【詳解】



$\because\ \sqrt{1+\sin2\theta}-\sqrt{1-\sin2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

由 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的圖形，知 $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 時，$0>\cos\theta>\sin\theta$

∴ $\sin\theta+\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta<0$

故　原式 $=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$

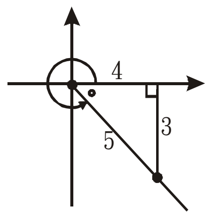
4. (複選)設 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$ 且 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ，則

(A) $\cos\theta=\frac{4}{5}$　(B) $\tan2\theta=-\frac{24}{7}$　(C) $\cos3\theta=-\frac{44}{125}$　(D) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$　(E) $\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ 且 $\sin\theta=-\frac{3}{5}\Rightarrow$ 　$\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi$ $\Rightarrow$



(A) $\cos\theta=\frac{4}{5}$

(B) $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot(\frac{-3}{4})}{1-(-\frac{3}{4})^2}=-\frac{24}{7}$

(C) $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4(\frac{4}{5})^3-3\cdot(\frac{4}{5})=-\frac{44}{125}$

(D) $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\Rightarrow\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(E) $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

5. (複選)下列各等式中，哪些是三角恆等式？

(A) $\sin3\theta=4\sin^3\theta-3\sin\theta$　(B) $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　(C) $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(D) $\cos3\theta=3\cos\theta-4\cos^3\theta$　(E) $\sin2\theta=\cos\theta\sin3\theta-\sin\theta\cos3\theta$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】三倍角公式：(E) $\sin3\theta\cos\theta-\cos3\theta\sin\theta=\sin(3\theta-\theta)=\sin2\theta$

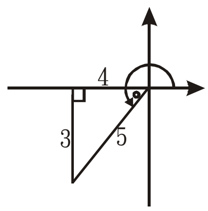
二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則 $\sin\frac{\alpha}{2}$ = __________ 。

【解答】$\frac{3}{\sqrt{10}}$

【詳解】

∵ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow$



∴ $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$\because\ \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$ $\therefore\ \sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ 且 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

2. $\sin 67.5°$之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

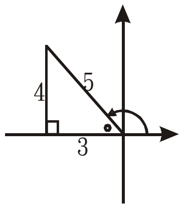
【詳解】$\sin 67.5°=\sin\dfrac{135°}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\cos 135°}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

3. 若$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$且$\sin 2\theta=\dfrac{4}{5}$，求$\sin\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【詳解】

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi \text{ 且 } \sin 2\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \cos 2\theta=-\frac{3}{5}\Rightarrow \sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}==\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

4. 設$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，$0<\theta<\pi$，則(1) $\sin 2\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。 (2) $\cos\theta=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-\dfrac{24}{25}$ (2) $-\dfrac{3}{5}$

【詳解】(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ 平方 $\Rightarrow$ $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$

$\therefore\ 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}\Rightarrow 1+\sin 2\theta=\dfrac{1}{25} \Rightarrow \sin 2\theta=-\dfrac{24}{25}$

(2)$\because \begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}\\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{12}{25}\end{cases}\Rightarrow(\dfrac{1}{5}-\cos\theta)\cos\theta=-\dfrac{12}{25}\Rightarrow 25x^2-5x-12=0$ (設$x=\sin\theta$)

$(5x-4)(5x+3)=0\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{-3}{5}$或$\dfrac{4}{5}$

又 $0<\theta<\pi$且$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{12}{25}\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\begin{cases}\sin\theta>0\\ \cos\theta>0\end{cases}$，故$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

5. 求下列各值：

(1) $\sin 15°=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(3) $\cos 20°\cos 40°\cos 80°=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) 2 (3) $\dfrac{1}{8}$

【詳解】

(1) $\sin 15° = \sin\dfrac{30°}{2} = +\sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2)原式 $= \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2} + \dfrac{1+\cos\dfrac{3\pi}{4}}{2} + \dfrac{1+\cos\dfrac{5\pi}{4}}{2} + \dfrac{1+\cos\dfrac{7\pi}{4}}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\times 4 + \dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3}{4}\pi + \cos\dfrac{5}{4}\pi + \cos\dfrac{7}{4}\pi)$

$= \dfrac{1}{2}\times 4 + \dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4}) = 2$

(3) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \dfrac{2\sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°}{2\sin 20°}$

$= \dfrac{\sin 40° \cos 40° \cos 80°}{2\sin 20°}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2}\sin 80° \cos 80°}{2\sin 20°}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2}\sin 160°}{4\sin 20°}$

$= \dfrac{\sin 20°}{8\sin 20°}$

$= \dfrac{1}{8}$

6. 設 $0 \le x < 2\pi$，$\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0$ 之解爲__________。

【解答】 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5\pi}{3}$

【詳解】

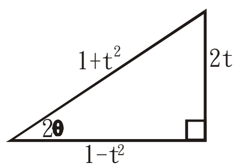
$\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 - 5\cos x + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \dfrac{1}{2}$ 或 2（不合），又 $0 \le x < 2\pi$， $x = \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5\pi}{3}$

7. $\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\pi}{10}}{1+\tan^2\dfrac{\pi}{10}} =$ __________。

【解答】 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

【詳解】



∵ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，$\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，$\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=\cos(2\times\frac{\pi}{10})=\cos36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ ⇐背；也背⇒ $\sin18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

8. $5\sin\theta+12\cos\theta=0$，$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求(1) $\tan2\theta=$ __________。 (2) $\cos\frac{\theta}{2}=$ __________。

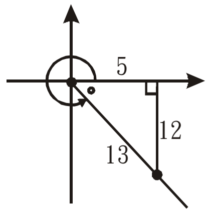
【解答】(1) $\frac{120}{119}$ (2) $\frac{-3}{\sqrt{13}}$

【詳解】

(1) $5\sin\theta+12\cos\theta=0 \Rightarrow 5\sin\theta=-12\cos\theta$，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{-24}{5}}{1-\frac{144}{25}}=\frac{24}{5}\times\frac{25}{119}=\frac{120}{119}$$

(2) $\because \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$，$\cos\theta>0$ 且 $\tan\theta=-\frac{12}{5}\Rightarrow$



$\Rightarrow\cos\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$

$(\because \frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi \quad \therefore \cos\frac{\theta}{2}<0)$

9. 設$\tan\frac{\theta}{2}=3$，則$\sin2\theta=$ __________。

【解答】$\frac{-24}{25}$

【詳解】

$\because \tan\frac{\theta}{2}=3 \quad \therefore \tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$\sin2\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{-24}{25}$

10. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=\frac{11}{61}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，求$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=$ __________。

【解答】$\frac{16}{305}$

【詳解】

由$\sin\theta=(\pm)\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{2}}\Rightarrow \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}=\frac{1-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{2}=\frac{1-(\frac{11}{61}\times\frac{3}{5}+\frac{60}{61}\times\frac{4}{5})}{2}=\frac{16}{305}$$

11. 設$\sin x+\cos x=\frac{4}{5}$，則$\sin3x-\cos3x$之值爲__________。

【解答】$-\frac{172}{125}$

【詳解】

$(\sin x+\cos x)^2=\dfrac{16}{25}\quad\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{16}{25}\Rightarrow\quad \sin x\cos x=-\dfrac{9}{50}$

$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=(\dfrac{4}{5})^3-3(-\dfrac{9}{50})(\dfrac{4}{5})=\dfrac{118}{125}$

$\sin 3x-\cos 3x=(3\sin x-4\sin^3x)-(4\cos^3x-3\cos x)$

$=3(\sin x+\cos x)-4(\sin^3x+\cos^3x)=3(\dfrac{4}{5})-4(\dfrac{118}{125})=-\dfrac{172}{125}$

12. 設$f(x)=4x^3-3x+3$，求$f(x)$除以$x-\sin 20°$之餘式__________。

【解答】$3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

$f(\sin 20°)=4\sin^3 20°-3\sin 20°+3=-(3\sin 20°-4\sin^3 20°)+3=-\sin 60°+3=3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

13. $\cos^3\dfrac{\pi}{8}+\cos^3\dfrac{3\pi}{8}+\cos^3\dfrac{5\pi}{8}+\cos^3\dfrac{7\pi}{8}=$__________。

【解答】0

【詳解】

$\cos^3(\pi-\theta)=(-\cos\theta)^3=-\cos^3\theta$

$\therefore$ 原式 $=(\cos^3\dfrac{\pi}{8}+\cos^3\dfrac{7\pi}{8})+(\cos^3\dfrac{3\pi}{8}+\cos^3\dfrac{5\pi}{8})=0$

14.若$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，且 $25\sin^2\theta+\sin\theta=24$，則$\cos\dfrac{\theta}{2}$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{3}{5}$

【詳解】

$25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0\quad\Rightarrow\quad(25\sin\theta-24)(\sin\theta+1)=0$

但$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta\neq 1\quad\therefore\quad\sin\theta=\dfrac{24}{25}\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=-\dfrac{7}{25}$

$\because\quad\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}\quad\therefore\quad\cos\dfrac{\theta}{2}=+\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{7}{25}}{2}}=\dfrac{3}{5}$

15.設$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，則(1) $\sin 2\theta$ = __________。 (2) $\cos 2\theta$ = __________。

【解答】(1) $-\dfrac{4}{5}$ (2) $\dfrac{3}{5}$

【詳解】

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\quad\Rightarrow\ \therefore\ \cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$，

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot(\dfrac{-1}{\sqrt{5}})=-\dfrac{4}{5}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot(\dfrac{2}{\sqrt{5}})^2=-\dfrac{3}{5}$

16.設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\tan\theta=-\frac{4}{3}$，則(1) $\tan2\theta=$ ________。 (2) $\tan\frac{\theta}{2}=$ ________。

【解答】(1) $\frac{24}{7}$ (2) 2

【詳解】(1) $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(-\frac{4}{3})}{1-(-\frac{4}{3})^2}=\frac{24}{7}$

(2)∵ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$且 $\tan\theta=-\frac{4}{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，∴ $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}=2$

17.設$x\in R$，$f(x)=2+\sin x+\cos x-\sin2x$

(1)令$t=\sin x+\cos x$，請以t表示$f(x)=$ ________。

(2)求$f(x)$之最小値爲________。

【解答】(1) $-t^2+t+3$ (2) $1-\sqrt{2}$

【詳解】

$f(x)=\sin x+\cos x-\sin2x+2$

(1)令$t=\sin x+\cos x$，則$t^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin2x \Rightarrow \sin2x=t^2-1$ 且$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

∴ $f(x)=t-(t^2-1)+2=-t^2+t+3$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

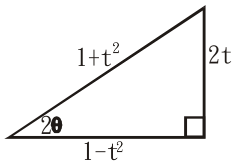
(2) $f(x)=-t^2+t+3=-(t^2-t+\frac{1}{4})+\frac{13}{4}=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$

當$t=-\sqrt{2}$時，$f(x)=-(-\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}=1-\sqrt{2}$ 爲最小値

18.設θ 爲銳角，若$\sin^2\theta+2=5\sin\theta\cos\theta$，則$\tan\theta=$ ________。

【解答】1 或$\frac{2}{3}$

【詳解】



原式 $\Rightarrow \frac{1-\cos2\theta}{2}+2=\frac{5}{2}\sin2\theta$

$\Rightarrow 5\sin2\theta+\cos2\theta-5=5\cdot\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}-5=0$

$\Rightarrow 3\tan^2\theta-5\tan\theta+2=0 \Rightarrow (3\tan\theta-2)(\tan\theta-1)=0$，∴ $\tan\theta=1$ 或$\frac{2}{3}$

19.(1)若$\tan\theta=-\frac{4}{3}$，則$\sin2\theta=$ ________。

(2)若 $-\pi<\theta<0$，$\tan\theta=-\frac{4}{3}$，則$\sin\frac{\theta}{2}=$ ________，$\sin3\theta=$ ________。

【解答】(1) $\frac{-24}{25}$ (2) $\frac{-\sqrt{5}}{5}$；$\frac{-44}{125}$

【詳解】

(1) $\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\cdot(\frac{-4}{3})}{1+(\frac{-4}{3})^2}=\frac{-24}{25}$

(2) $-\pi<\theta<0$ 且 $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow\quad -\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$，$\sin\theta=-\dfrac{4}{5},\quad \cos\theta=\dfrac{3}{5}$

由 $-\pi<\theta<0 \quad\Rightarrow\quad -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<0$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\dfrac{-\sqrt{5}}{5}$

$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\times(\dfrac{-4}{5})-4\times(\dfrac{-4}{5})^3=\dfrac{-44}{125}$

20.函數 $f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$ 在 $0\le t\le 2\pi$ 的範圍內，其最大值爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{16}$

【詳解】

$f(t)=(1-\cos^2 2t)-3\cdot\dfrac{1+\cos2t}{2}=-(\cos2t+\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{1}{16}$

$\cos2t=-\dfrac{3}{4}$ 時，$f(t)=\dfrac{1}{16}$ 爲最大値，故 $f(t)$ 之最大値爲 $\dfrac{1}{16}$

21.設 $\cos2\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin2\theta<0$，則 $\tan\theta+\cot\theta=$ __________。

【解答】$-\dfrac{5}{2}$

【詳解】

$\because\quad \cos2\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 $\sin2\theta<0\quad\therefore\quad \sin2\theta=-\sqrt{1-\cos^2 2\theta}=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin2\theta}=\dfrac{2}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{10}{4}=$

$-\dfrac{5}{2}$

22.sec12°sec24°sec48°sec96°= __________。

【解答】-16

【詳解】

$\sec12^\circ\sec24^\circ\text{sce}48^\circ\sec96^\circ=\dfrac{1}{\cos12^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ\cos96^\circ}$

$=\dfrac{2\sin12^\circ}{2\sin12^\circ\cos12^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ\cos96^\circ}=\dfrac{2\sin12^\circ}{\sin24^\circ\cos24^\circ\cos48^\circ\cos96^\circ}$

$=\dfrac{4\sin12^\circ}{\sin48^\circ\cos48^\circ\cos96^\circ}=\dfrac{8\sin12^\circ}{\sin96^\circ\cos96^\circ}=\dfrac{16\sin12^\circ}{\sin192^\circ}=\dfrac{16\sin12^\circ}{-\sin12^\circ}=-16$

23.設 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根，試以 p，q 表 $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2})^2=$__________。

【解答】$1-p+q$

【詳解】

$\because\quad \sin\theta$，$\cos\theta$ 爲 $x^2+px+q=0$ 的二根 $\quad\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=-p$，$\sin\theta\cdot\cos\theta=q$

故 $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2})^2=2\,(\dfrac{1+\cos\theta}{2})(\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2})=(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)$

$=1+(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=1+(-p)+q=1-p+q$