高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.06.18					
範圍	3-2 和角公式	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 化簡 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)$得(A) -1 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2 (E) $\frac{1}{2}$

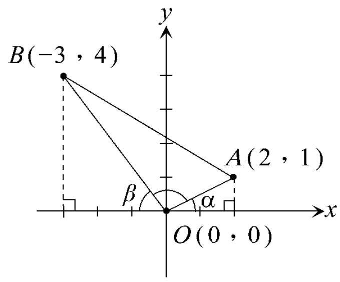
【解答】(C)

【詳解】$\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)=\sin80°(-\sin20°)+(-\cos20°)\cos80°$

$=-(\cos20°\cos80°+\sin20°\sin80°)=-\cos(80°-20°)=-\cos60°=-\frac{1}{2}$

2. 坐標平面上設 $A(2，1)$，$B(-3，4)$，$O(0，0)$，則 $\tan\angle AOB=$

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{12}{5}$ (C) $-\frac{11}{2}$ (D) $-\frac{13}{5}$ (E) -1



【解答】(C)

【詳解】$\tan\angle AOB=\tan(\pi-(\alpha+\beta))$

$$=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}=-\frac{11}{2}$$

3. 在△ABC 中，已知 $\tan A\cdot\tan B=1$，則下列何者恆正確？

(A) $\overline{AB}=\overline{AC}$ (B) $\angle C=90°$ (C)$\angle A=45°$ (D) $\overline{AB}=\overline{BC}$ (E)$\angle A=\angle B$

【解答】(B)

【詳解】$\tan A\cdot\tan B=1 \Rightarrow \frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=1 \Rightarrow \sin A\sin B=\cos A\cos B$

$\Rightarrow \cos A\cos B-\sin A\sin B=0 \Rightarrow \cos(A+B)=0$

$\Rightarrow \cos(\pi-C)=0$（$\because$ $A+B+C=\pi$） $\Rightarrow$ $\cos C=0$，$\therefore$ $\angle C=90°$

4. $\sqrt{3}\tan20°+\sqrt{3}\tan10°+\tan20°\tan10°=$ (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 1 (E) -1

【解答】(D)

【詳解】

$\tan30°=\tan(20°+10°)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\tan20°+\tan10°}{1-\tan20°\tan10°}\Rightarrow\sqrt{3}\tan20°+\sqrt{3}\tan10°+\tan20°\tan10°=1$

5. (複選)設 $0<\alpha，\beta<\pi$，且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ，$\tan\beta=\frac{1}{3}$ ，下列何者正確？

(A) $\tan(\alpha+\beta)=\pm1$ (B) $\sec(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$ (C) $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ (D) $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ (E) $\alpha+\beta$ 有二解

【解答】(B)(C)

【詳解】$0<\alpha，\beta<\pi$且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ，$\tan\beta=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$ $\therefore$ $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

又 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$，故$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 求下式值： $\sin164°\cos44°-\cos16°\sin224°=$__________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】原式$=\sin(180°-16°)\cos44°-\cos16°\sin(180°+44°)$

$=\sin16°\cos44°+\cos16°\sin44°=\sin(16°+44°)=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}\pi$，求$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=$__________。（$\alpha$，$\beta$ 爲銳角）

【解答】2

【詳解】$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=1=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\Rightarrow\quad 1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$

$\Rightarrow\quad 1=\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta$

$\therefore\quad(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+1=2$

3. 設$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$，且$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{4}$，則$\cos(\alpha+\beta)=$__________。

【解答】$\dfrac{4+3\sqrt{15}}{20}$

【詳解】$\because\quad\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\quad\therefore\quad\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$

$\because\quad\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi\quad\therefore\quad\cos\beta=-\dfrac{1}{4}$，$\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{-4}{5}\times\dfrac{-1}{4}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{-\sqrt{15}}{4}=\dfrac{4+3\sqrt{15}}{20}$

4. 設$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且$\sin\alpha=\dfrac{13}{14}$，$\sin\beta=\dfrac{11}{14}$，則

(1) $\cos(\alpha-\beta)=$__________。 (2) $\alpha-\beta=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{1}{2}$ (2)$-\dfrac{\pi}{3}$

【詳解】$\because\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$且 $\sin\alpha=\dfrac{13}{14}$，$\sin\beta=\dfrac{11}{14}\quad\therefore\quad\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos\beta=-\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}(-\dfrac{5\sqrt{3}}{14})+\dfrac{13}{14}\cdot\dfrac{11}{14}=\dfrac{98}{196}=\dfrac{1}{2}$

$\because\quad-\pi<-\beta<-\dfrac{\pi}{2}$且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\quad\therefore\quad-\pi<\alpha-\beta<0$，故$\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{3}$

5. 設 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，則(1) $\tan(\alpha+\beta)=$______。(2) $\alpha+\beta=$______。

【解答】(1) 1 (2)$\dfrac{5\pi}{4}$

【詳解】(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$　(2) $\because$　$\pi<\alpha+\beta<2\pi$　$\therefore$　$\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{4}$

6. 設$\tan\alpha=3$，$\tan(\alpha-\beta)=1$，則$\tan\beta=$ __________。

【解答】$\dfrac{1}{2}$

【詳解】$\tan\beta=\tan(\alpha-(\alpha-\beta))=\dfrac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{3-1}{1+3\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$

7. $\triangle ABC$中，$\sin B\cos C=\cos B\sin C$，則$\triangle ABC$之形狀爲__________三角形。

【解答】等腰

【詳解】

原式$\Rightarrow\sin B\cos C-\cos B\sin C=0\Rightarrow\sin(B-C)=0\Rightarrow B-C=0\Rightarrow B=C$，$\therefore\triangle ABC$ 爲等腰$\triangle$

8. $\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{12}{13}$，則(1)$\cos C=$__________。(2) $a:b:c=$ ________________。

【解答】(1)$\dfrac{-16}{65}$　(2) 52：25：63

【詳解】

$\triangle ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{12}{13}\Rightarrow\sin A=\dfrac{4}{5}$；$\sin B=\dfrac{5}{13}$

(1)$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13}=\dfrac{-16}{65}$

(2) $\cos C=\dfrac{-16}{65}\Rightarrow\sin C=\dfrac{63}{65}$

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{4}{5}:\dfrac{5}{13}:\dfrac{63}{65}=52:25:63$

9. 已知$\tan\theta=2$，則$\tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2})-\tan(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2})$之値爲 __________。

【解答】4

【詳解】

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})-\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{(1+\tan\frac{\theta}{2})^2-(1-\tan\frac{\theta}{2})^2}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\tan(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2})=2\tan\theta=2\times 2=4$$

10.設 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$，則

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ __________。　(2) $\alpha+\beta=$ __________。

【解答】(1)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2)$\dfrac{3\pi}{4}$

【詳解】$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$　$\Rightarrow$　$\sin\alpha=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$；$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$　$\Rightarrow$　$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}(-\dfrac{3}{5})+\dfrac{7}{5\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\because\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}\quad\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$

11.設θ是第四象限角，且$\cot\theta=-3$，則$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})$之值爲 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$-\dfrac{3}{20}$

【詳解】$\because\ \cot\theta=-3$ 且θ是第四象限角 $\therefore\ \sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})$

$=(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6})(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6})=\sin^2\theta\cos^2\dfrac{\pi}{6}-\cos^2\theta\sin^2\dfrac{\pi}{6}$

$=(-\dfrac{1}{\sqrt{10}})^2(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2-(\dfrac{3}{\sqrt{10}})^2\cdot(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{3}{4}-\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{4}=-\dfrac{6}{40}=-\dfrac{3}{20}$

12.$\triangle ABC$中，$\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\tan B=\dfrac{1}{3}$，則(1) $\tan C=$ ＿＿＿＿＿＿＿。 (2) $\angle C=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) -1 (2) $\dfrac{3\pi}{4}$

【詳解】

$\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=-\dfrac{3+2}{6-1}=-1$

又$0<\angle C<\pi\Rightarrow\angle C=\dfrac{3\pi}{4}$

13.設$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 爲$x^2+6x+3=0$ 之二根，則

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$＿＿＿＿＿＿＿。

(1) $\cos^2(\alpha+\beta)=$＿＿＿＿＿＿＿。

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+5\cos^2(\alpha+\beta)$之值爲＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)3 (2)$\dfrac{1}{10}$ (3) 2

【詳解】(1)由根與係數關係$\tan\alpha+\tan\beta=-6$，$\tan\alpha\tan\beta=3$

$\Rightarrow\ \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-6}{1-3}=3$

(2) $\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+3^2}=\dfrac{1}{10}$

(3) 原式$=\cos^2(\alpha+\beta)\left[\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\dfrac{5\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}\right]$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[\tan^2(\alpha+\beta)+2\tan(\alpha+\beta)+5=\dfrac{1}{10}(3^2+2\cdot3+5)=2$

14.若$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\cot\alpha+\cot\beta=-\dfrac{4}{3}$，則$\tan(\alpha+\beta)=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】$\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ $-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ $\tan\alpha\tan\beta=-3$

$\therefore$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{1+3}=1$

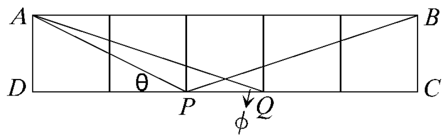
15.$\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)\tan(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)=$ __________。

【解答】1

【詳解】

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\cdot\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=1$$

16.如圖，矩形$ABCD$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AD}=1$，$\overline{DP}=2$，$\overline{PQ}=1$，$\angle APD=\theta$，$\angle AQD=\phi$，則$\theta+\phi=$ __________度。



【解答】45

【詳解】

$$\because\ \tan\theta=\frac{1}{2},\ \tan\phi=\frac{1}{3}\quad\therefore\ \tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$$

$0^\circ<\theta+\phi<180^\circ$ $\Rightarrow$ $\theta+\phi=45^\circ$

17.設$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，若$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，試求$\alpha+\beta=$ __________度。

【解答】$\dfrac{7\pi}{4}$

【詳解】

因為$\dfrac{\pi}{2}<\alpha$，$\beta<\pi$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，所以$\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

又$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{-3}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

且$\pi<\alpha+\beta<2\pi$，故$\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{4}$