

範圍	3-1 三角函數圖形	班級		姓名	
		座號		姓名	

一、選擇題(每題 10 分)

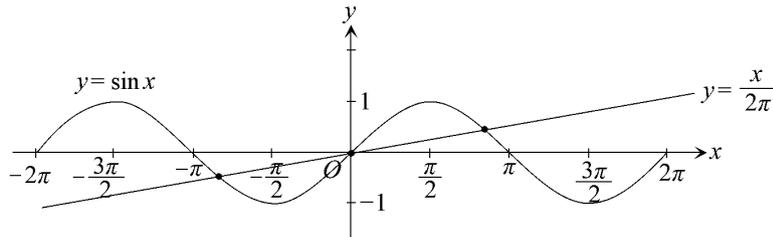
1. 方程式 $2\pi\sin x = x$ 的實根個數為(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) ∞ 個

【解答】(C)

【詳解】

$$2\pi\sin x = x \Rightarrow \sin x = \frac{x}{2\pi}, \text{ 令 } y = \sin x, \text{ 且 } y = \frac{x}{2\pi}$$

方程式 $2\pi\sin x = x$ 的實數解就是 $y = \sin x$ 與 $y = \frac{x}{2\pi}$ 二圖形交點的 x 坐標

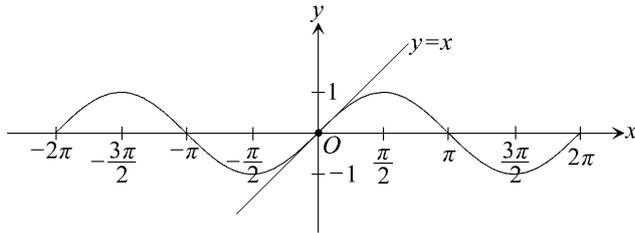


二圖形有 3 個交點，方程式 $2\pi\sin x = x$ 有 3 個實數解

2. 直線 $y = x$ 與函數 $y = \sin x$ 圖形的交點個數為(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) ∞ 個

【解答】(B)

【詳解】



二圖交點個數為 1 個

3. 將函數 $y = \sin x$ 的圖形由 y 軸左右往中央壓縮為 $\frac{1}{2}$ ，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 個單位，所得新圖形的

函數為(A) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ (B) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ (C) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

(D) $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$ (E) $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

【解答】(C)

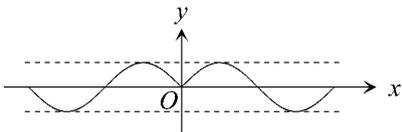
【詳解】 $y = \sin x \xrightarrow{\text{水平壓縮}\frac{1}{2}} y = \sin 2x \xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}} y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

4. (複選)下列諸函數中，哪一個是週期函數？

(A) $y = x^2$ (B) $y = 2\cos(-3x + \frac{\pi}{7})$ (C) $y = \sin x + |\cos x|$ (D) $y = \sin|x|$ (E) $y = \cos|x|$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

$$(D) y = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$$


∴ 不為週期函數

$$(E) y = \cos|x| = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases} \quad \therefore y = \cos|x| = \cos x \text{ 為週期函數}$$

5. 下列何者無意義？(A) $\tan \frac{\pi^\circ}{2}$ (B) $\sec \pi$ (C) $\csc \frac{3\pi}{2}$ (D) $\cot \pi^\circ$ (E) $\tan \frac{\pi}{2}$

【解答】(E)

【詳解】 $\tan \theta$, $\sec \theta$ 分母皆為 $\cos \theta$, 故在 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ 時無意義,

$\cot \theta$, $\csc \theta$ 分母皆為 $\sin \theta$, 在 $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ 時無意義

6. (複選) 下列各函數的圖形, 何者有漸近線？

(A) $y = \sin x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \cot x$ (D) $y = \sec x$ (E) $y = \csc x$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】觀察各三角函數 $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$ 等皆有分母故有漸近線

且 $\tan \theta$, $\sec \theta$ 分母為 $\cos \theta$, 在 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ 時 $\cos \theta = 0$, 漸近線 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$,

$n \in \mathbb{Z}$

$\cot \theta$, $\csc \theta$ 分母皆為 $\sin \theta$, 在 $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ 時 $\sin \theta = 0$, 漸近線 $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

7. (複選) 設 a, b, c, d 為正數且 d 為最小的正數,

若 $y = a + b\cos(cx + d)\pi$ 的一個週期之圖形如圖, 則:

(A) $a = 1$ (B) $b = 1$ (C) $c = 2$ (D) $d = 1$ (E) $a + b + c = 15d$

【解答】(B)(C)(E)

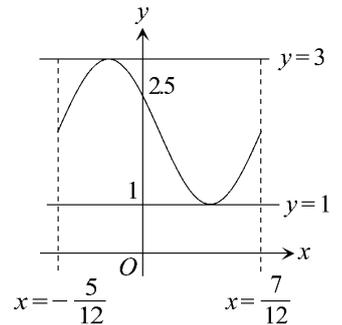
【詳解】

$$y = a + b\cos(cx + d)\pi \Rightarrow y = a + b\cos(c\pi x + d\pi)$$

(A) 振幅為 $\frac{3-1}{2} = 1$, $b = 1$ (B) 週期為 $\frac{2\pi}{c\pi} = \frac{7}{12} - (-\frac{5}{12}) = 1 \Rightarrow c = 2$

(C) 圖形係 $y = b\cos(cx + d)\pi$ 向上平移 2 個單位 $\therefore a = 2$

(D) 圖形過點 $A(0, 2.5)$, $2.5 = 2 + \cos(2 \times 0 + d)\pi \Rightarrow \cos d\pi = \frac{1}{2}$, 最小正數 $d = \frac{1}{3}$

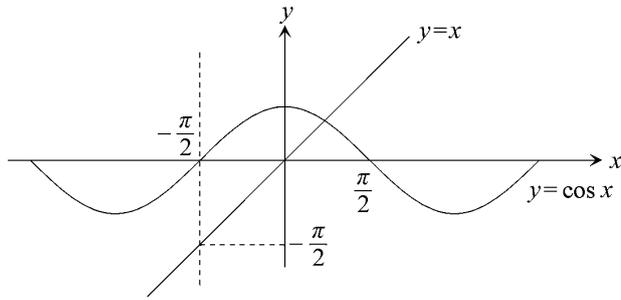


二、填充題(每題 10 分)

1. $\cos x = x$ 有 _____ 個實數解。

【解答】1

【詳解】



$\begin{cases} y = x \\ y = \cos x \end{cases}$ ，由圖知只有一個交點 $\therefore \cos x = x$ 有一個實數解

2. 求 $y = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ 之(1)週期_____。(2)最大值_____。

【解答】(1) 6π (2) $\frac{1}{4}$

【詳解】(1) 週期 $= \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 2\pi \times 3 = 6\pi$ (2) $y = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ 之 $\text{Max} = \frac{1}{4}$

3. 設 $a, b \in N$ ，若 $y = \sin\left(ax - \frac{1}{b}\right)$ 與 $y = \tan\left(\frac{1}{b}x - a\right)$ 有相同的週期，則 $a + b =$ _____。

【解答】3

【詳解】

$\because y = \sin x$ 的週期為 2π $\therefore y = \sin\left(ax - \frac{1}{b}\right)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{a}$

$\because y = \tan x$ 的週期為 π $\therefore y = \tan\left(\frac{1}{b}x - a\right)$ 的週期為 $\frac{\pi}{\frac{1}{b}} = b\pi$

$\therefore \frac{2\pi}{a} = b\pi$ $\therefore \frac{2}{a} = b$ $\because a, b \in N$ $\therefore a = 1, b = 2$ 或 $a = 2, b = 1$ ，故 $a + b = 3$

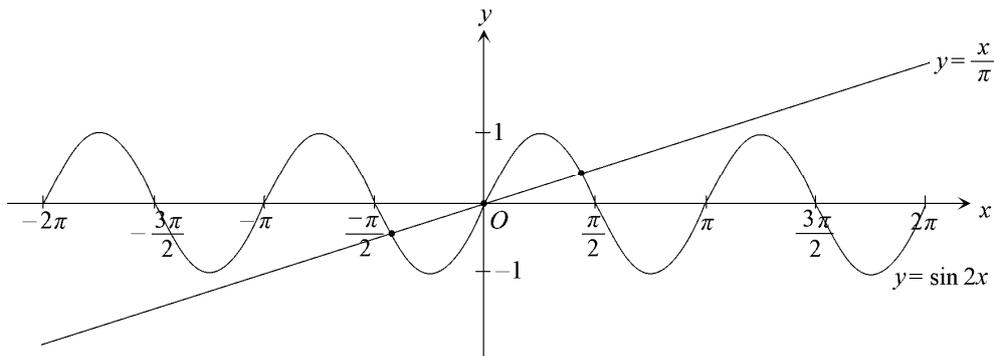
4. $\sin 2x = \frac{x}{\pi}$ 之實根，共有_____個。

【解答】3

【詳解】

方程式 $\sin 2x = \frac{x}{\pi}$ 實根的個數，即二圖形 $y = \sin 2x$ 與 $y = \frac{x}{\pi}$ 的交點個數

坐標平面上 $y = \sin 2x$ 與 $y = \frac{x}{\pi}$ [過 $(0,0), (\pi,1)$] 之圖形如下



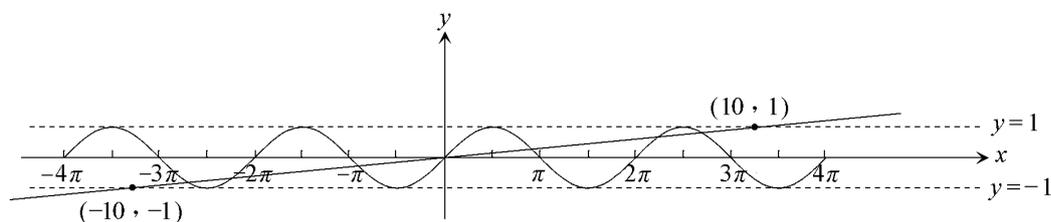
二曲線 $y = \sin 2x$ 與 $y = \frac{x}{\pi}$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 之間恰有三個交點

故方程式 $\sin 2x = \frac{x}{\pi}$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 之間恰有三實根

5. 方程式 $10\sin x = x$ 共有 _____ 個實根。

【解答】 7 個

【詳解】



$10\sin x = x \Rightarrow \sin x = \frac{x}{10}$ 的實根個數，即 $y = \sin x$ 與 $y = \frac{x}{10}$ 二圖形之交點個數，圖形如上：

以 $x = 3\pi$ 代入 $y = \frac{x}{10}$ 得 y 值為 $\frac{3\pi}{10} < 1 \Rightarrow 3\pi < 10$

以 $x = 4\pi$ 代入 $y = \frac{x}{10}$ 得 y 值為 $\frac{4\pi}{10} > 1 \Rightarrow 4\pi > 10$

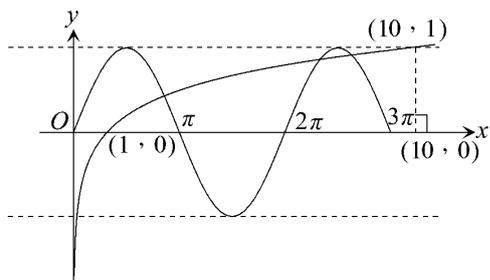
$y = \frac{x}{10}$ 過 $(0, 0)$, $(10, 1)$ ，又 $3\pi < 10 < 4\pi \Rightarrow -4\pi < -10 < -3\pi$

故 $y = \sin x$ 與 $y = \frac{x}{10}$ 之交點有 7 個，即 $10\sin x = x$ 有 7 個實根

6. 方程式 $\sin x = \log x$ 共有 _____ 個實根。

【解答】 3

【詳解】



$\sin x = \log x$ 的實根數 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin x \\ y = \log x \end{cases}$ 二圖形交點數，圖形如上，有 3 個交點

7. 直角坐標平面上點 $P(\sin 2, \tan 9)$ 在第 _____ 象限。

【解答】 四

【詳解】

$\because 2$ 弧度 $= 57.3^\circ \times 2 = 114.6^\circ$ 第二象限 $\Rightarrow \sin 2 > 0$

$\because 9$ 弧度 $= 57.3^\circ \times 9 = 515.7^\circ = 360^\circ + 155.7^\circ$ 第二象限 $\Rightarrow \tan 9 < 0$

\therefore 點 $P(\sin 2, \tan 9)$ 的 x 坐標為正， y 坐標為負，點 P 在第四象限

【詳解】

$$y = \sin x \xrightarrow{\text{向右平移}\frac{\pi}{6}\text{單位}} y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\text{向上平移}\frac{1}{2}\text{單位}} y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$$

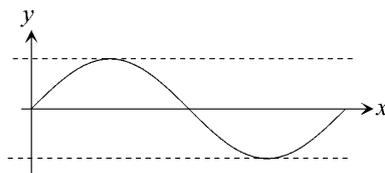
12. $f(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|$ 之週期為_____。

【解答】 π

【詳解】

$$f(x + \pi) = \left|\sin\frac{x + \pi}{2}\right| + \left|\cos\frac{x + \pi}{2}\right| = \left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|-\sin\frac{x}{2}\right| = f(x)$$

(x)，故週期為 π



13. 設 $0 \leq x \leq 2\pi$ ， $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之解為_____。

【解答】 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

【詳解】 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$

14. 設 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，求方程式 $\sin x + |\sin x| = \tan x$ 之實根個數。

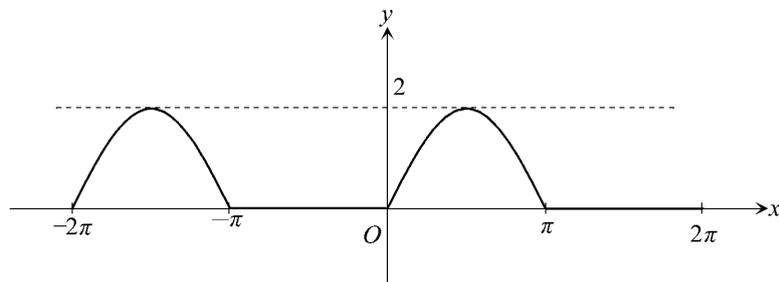
【解答】 7 個

【詳解】

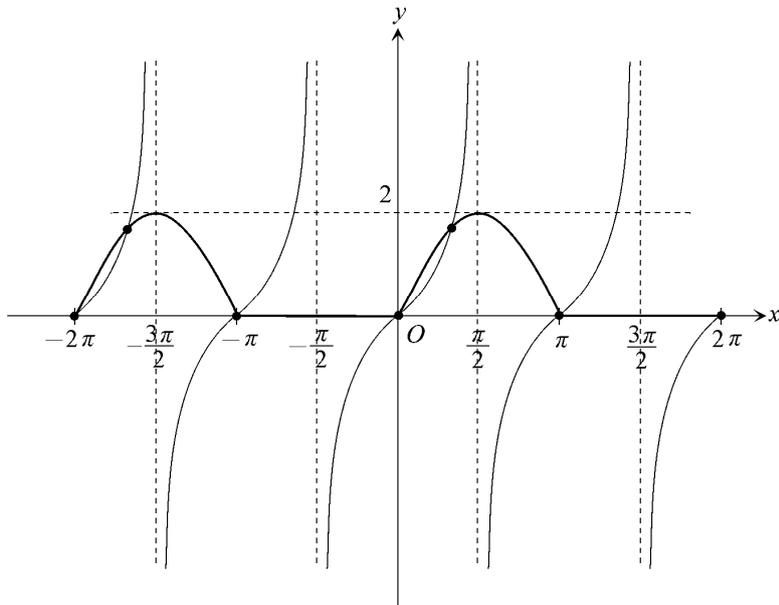
當 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ， $y = \sin x + |\sin x|$

x 在第一與第二象限時(即 $-2\pi \leq x \leq -\pi$ ； $0 \leq x \leq \pi$)， $y = \sin x + \sin x = 2\sin x$ ，

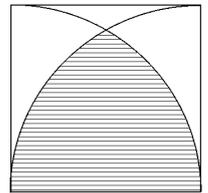
x 在第三與第四象限時(即 $-\pi \leq x \leq 0$ ； $\pi \leq x \leq 2\pi$)， $y = \sin x - \sin x = 0$



$\sin x + |\sin x| = \tan x$ ，作 $\begin{cases} y = \sin x + |\sin x| \\ y = \tan x \end{cases}$ ，兩圖形有 7 個交點，故有 7 個實根



15. 正方形之邊長為 12，分別以 A, B 為圓心，12 為半徑，各作四分之一的圓，
如圖：試求斜線部分之面積_____。



【解答】 $48\pi - 36\sqrt{3}$

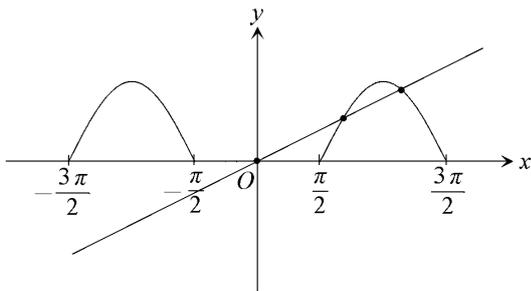
【詳解】

所求二個(半徑 12 圓心角 60 度)的扇形面積之和，去除中間之(邊長為 12 的正三角形)之面積，二個扇形面積之和占圓面積之 $\frac{1}{3}$ ，故所求之面積為 $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12^2 = 48\pi - 36\sqrt{3}$

16. 方程式 $|\cos x| - \cos x = \frac{1}{2}x$ 共有幾個實根？

【解答】3

【詳解】



因 $|\cos x| - \cos x = \frac{1}{2}x$ 有幾個實根 \Leftrightarrow 即 $\begin{cases} y = |\cos x| - \cos x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ 二圖形有幾個交點，

兩個圖形有三個相異交點，故方程式 $|\cos x| - \cos x = \frac{1}{2}x$ 有三個實根。

17. 一扇形的周長為定值 k ，試求此扇形的最大面積_____，並求此時扇形的半_____。
及此時扇形弧角為_____。

【解答】 $\frac{k^2}{16}$ ； $\frac{k}{4}$ ；2

【詳解】

設扇形半徑為 r ，圓心角為 θ ，則 $k = 2r + r\theta$ ，面積 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

算術平均數 \geq 幾何平均數

$$\frac{2r + r\theta}{2} \geq \sqrt{2r^2\theta} \Rightarrow \frac{k}{2} \geq \sqrt{2r^2\theta} \Rightarrow \frac{k^2}{4} \geq 2 \cdot 2A = 4A \quad \therefore \frac{k^2}{16} \geq A$$

故當 $2r = r\theta$ 時，即 $\theta = 2$ 時，扇形有最大面積 $\frac{k^2}{16}$

此時，將 $\theta = 2$ 代入 $k = 2r + r\theta$ 可得半徑 $r = \frac{k}{4}$

(相當於周長為一定值 k 的矩形，當其為正方形時面積 $(\frac{k}{4})^2 = \frac{k^2}{16}$ 最大)

18. $y = 2\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 1$ 之圖形時，(1)振幅為何？_____ (2)週期為何？_____

【解答】(1) 2 (2) π

【詳解】

$y = 2\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + 1$ 之圖形：振幅為原來兩倍為 $1 \times 2 = 2$ ，週期為 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

19. 將函數 $y = 3\cos(3x + \frac{\pi}{6})$ 圖形上各點向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 個單位後，再把圖形平行 x 軸方向伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍、平行 y 軸方向伸縮2倍，試求所得圖形的函數 $y =$ _____。

【解答】 $y = 6\sin(6x + \frac{\pi}{6})$

【詳解】

將 $y = 3\cos(3x + \frac{\pi}{6})$ 圖形 $\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{2}\text{單位}}$ $y = 3\cos[3(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{6}] = 3\sin(3x + \frac{\pi}{6})$

再將 $y = 3\sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 圖形 $\xrightarrow[\text{平行}y\text{軸方向伸縮}2\text{倍}]{\text{平行}x\text{軸方向伸縮}\frac{1}{2}\text{倍}}$ $y = 2 \times [3\sin(\frac{3x}{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{6})]$

(平行 y 軸方向伸縮2倍即振幅為原來兩倍)

$\therefore y = 6\sin(6x + \frac{\pi}{6})$ ，故所求圖形的函數 $y = 6\sin(6x + \frac{\pi}{6})$