高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.06.11					
範圍	2-6、3-1 測量、弧度	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 下列哪一個正切函數值最大？

(A) $\tan(-\frac{26\pi}{11})$ (B) $\tan(-\frac{7\pi}{11})$ (C) $\tan\frac{3\pi}{11}$ (D) $\tan\frac{13\pi}{11}$ (E) $\tan\frac{23\pi}{11}$

【解答】(B)

【詳解】

$\tan(-\frac{26\pi}{11})=\tan(-\frac{4\pi}{11})$，$\tan(-\frac{7\pi}{11})=\tan\frac{4\pi}{11}$，$\tan\frac{13\pi}{11}=\tan\frac{2\pi}{11}$，$\tan\frac{23\pi}{11}=\tan\frac{\pi}{11}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$時，$\tan x$ 爲遞增函數，$-\frac{4\pi}{11}<\frac{\pi}{11}<\frac{2\pi}{11}<\frac{3\pi}{11}<\frac{4\pi}{11}$

$\therefore\ \tan(-\frac{4\pi}{11})<\tan\frac{\pi}{11}<\tan\frac{2\pi}{11}<\tan\frac{3\pi}{11}<\tan\frac{4\pi}{11}$

即 $\tan(-\frac{26\pi}{11})<\tan\frac{23\pi}{11}<\tan\frac{13\pi}{11}<\tan\frac{3\pi}{11}<\tan(-\frac{7\pi}{11})$，故 $\tan(-\frac{7\pi}{11})$最大

2. 若 $\sin 2=a$，則下列何者正確？

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

【解答】(E)

【詳解】

$a=\sin 2=\sin(\frac{180^\circ}{\pi}\times 2)=\sin\frac{360^\circ}{\pi}\doteqdot\sin 114.6^\circ=\sin 65.4^\circ\quad\therefore\quad 1>a>\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 點 $P(\cos 100，\sin 100)$在：

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)坐標軸上

【解答】(D)

【詳解】

100 弳 $\doteqdot 100\times 57.3^\circ=5730^\circ=360^\circ\times 15+330^\circ$

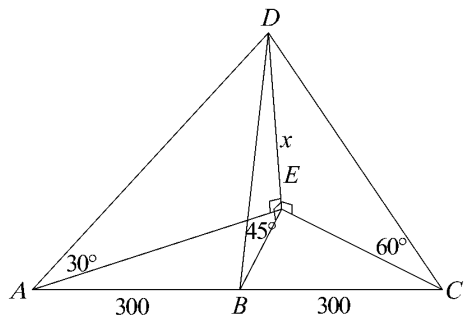
$\therefore$ 100 弳在第四象限 $\Rightarrow$ $\cos 100>0$，$\sin 100<0$ $\therefore$ $P(\cos 100，\sin 100)$在第四象限

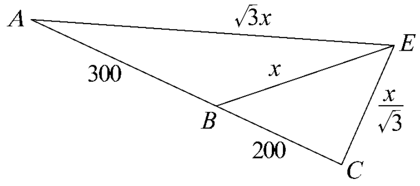
二、填充題(每題 10 分)

1. 在東西向的道路上，依序在 A，B，C 三點觀測道路北方一座山，測得山頂 D 的仰角分別爲 30°，45°，60° (1)若 $\overline{AB}=\overline{BC}=300$ 公尺，則山高 =__________公尺。
(2)若仰角不變，但 $\overline{AB}=300$ 公尺，$\overline{BC}=200$ 公尺，則山高 =________公尺。

【解答】(1) $150\sqrt{6}$ 公尺 (2)$100\sqrt{15}$

【詳解】

(1) 

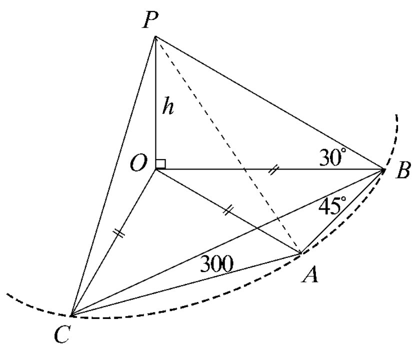
(2) 

(1) $\begin{cases} 直角\triangle ADE可得\overline{AE}=\sqrt{3}x \\ 直角\triangle BDE可得\overline{BE}=x \\ 直角\triangle CDE可得\overline{CE}=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\triangle ACE$中，中線定理$(\sqrt{3}\,x)^2+(\dfrac{x}{\sqrt{3}})^2=2(x^2+300^2)\quad\Rightarrow\quad x=150\sqrt{6}$

(2)由餘弦定理：$\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}x)^2+300^2-x^2}{2\cdot\sqrt{3}x\cdot 300}=\dfrac{(\sqrt{3}x)^2+500^2-(\dfrac{x}{\sqrt{3}})^2}{2\cdot\sqrt{3}x\cdot 500}\quad\Rightarrow\quad x=100\sqrt{15}$

2. 從平地上A，B，C三點測得85大樓樓頂之仰角均為 30°。
若$\angle ABC=45°$，而$\overline{AC}=300$ 公尺，則此大樓的高為______公尺。



【解答】$50\sqrt{6}$ 公尺

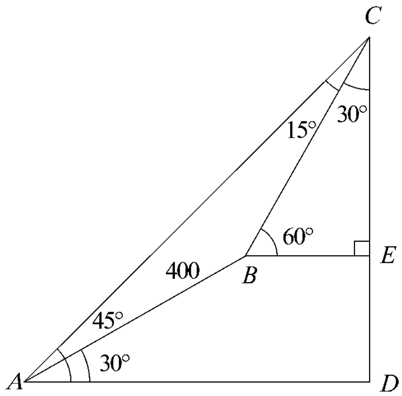
【詳解】

A，B，C 測得樓頂之仰角均為 30°$\Rightarrow$ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓，設$\overline{OP}=h\quad\Rightarrow\quad\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}\,h$

$\triangle ABC$ 中，$2R=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\overline{AC}=2R\sin 45°$，$R=\overline{OA}$

$\Rightarrow\quad 300=2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad h=50\sqrt{6}$

3. 某人於山麓測得山頂的仰角 45°，由山麓循 30°斜坡上行 400 公尺，再測得山頂的仰角 60°，則山高為__________公尺。



【解答】$200(\sqrt{3}+1)$

【詳解】

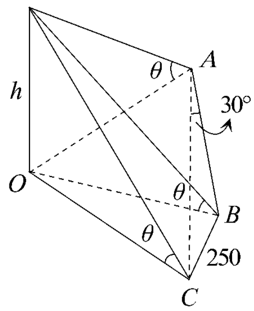
在$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=45°-30°=15°$，

$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCE=45°-30°=15°$，得$\angle ABC=150°$，

正弦定理$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 150°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 15°}\quad\Rightarrow\quad\overline{AC}=\dfrac{400\cdot\sin 150°}{\sin 15°}$

$\triangle ACD$ 中，$\overline{CD}=\overline{AC}\sin 45^\circ=\dfrac{400\cdot\sin 150^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=\dfrac{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=200(\sqrt{3}+1)$

4. 自平面上三點A、B、C測得某山頂之仰角均為θ，若$\angle BAC=30^\circ$，$\cot\theta=2$，$\overline{BC}=250$ 公尺，則山高為__________公尺。



【解答】125

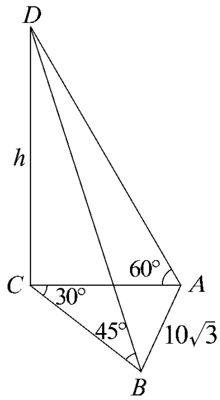
【詳解】

$\cot\theta=\dfrac{\overline{OC}}{h}\Rightarrow\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=h\cot\theta=2h$

$\therefore$ A，B，C 在以 O 為圓心，$2h$ 為半徑之圓上，

$\therefore$ $2h=\dfrac{250}{2\sin 30^\circ}$ $\Rightarrow$ $h=125$

5. 一塔高為h，石頭A在塔的正東，石頭B在塔的東 30°南，一人從塔頂D測得石頭A的俯角為 60°，石頭B之俯角為 45°，若$\overline{AB}=10\sqrt{3}$公尺，則塔高$h=$__________公尺。



【解答】30

【詳解】

由D測A的俯角為 60° $\Rightarrow$ 由A測D的仰角為 60°

由D測B的俯角為 45° $\Rightarrow$ 由B測D的仰角為 45°

$\therefore$ $\overline{BC}=h$，$\overline{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$，

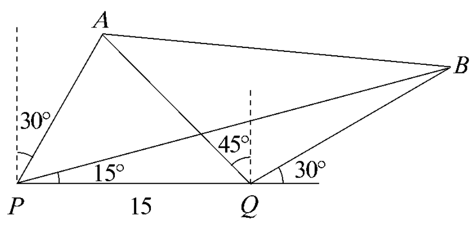
餘弦定理，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos 30^\circ$

$\Rightarrow$ $300=h^2+\dfrac{1}{3}h^2-2\cdot h\cdot\dfrac{h}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}h^2$ $\Rightarrow$ $h^2=900$ $\Rightarrow$ $h=30$（公尺）

6. 欲測湖岸兩點C，D的距離，在湖外A，B兩點測得$\overline{AB}=30$ 公尺，$\angle CAB=120^\circ$，$\angle DBA=135^\circ$，$\angle DAB=30^\circ$，$\angle CBA=45^\circ$，則$\overline{CD}=$__________。

【解答】$30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$公尺

8. 一船向正東方航行，在其左舷發現有兩座燈塔A與B，在P點測得A在北 30°東方位，B在東 15°北方位；該船前駛 15 浬到達Q點，再測得A在北 45°西方位，B在其東 30°北的方位，試求$\overline{AB}$的長度 ＝______浬。



【解答】$15\sqrt{4-\sqrt{3}}$

【詳解】

在$\triangle APQ$中，$\angle APQ=60^\circ$，$\angle AQP=45^\circ$，$\angle PAQ=75^\circ$

$\dfrac{15}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\overline{AQ}}{\sin 60^\circ}$ $\Rightarrow$ $\overline{AQ}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{15\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$

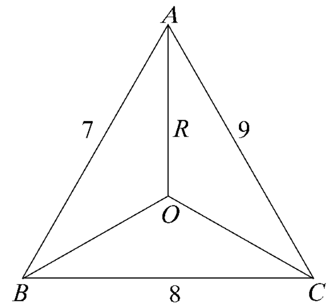
在$\triangle BPQ$中，$\angle BPQ=15^\circ$，$\angle BQP=150^\circ$，$\angle PBQ=15^\circ$， $\therefore$ $\overline{BQ}=\overline{PQ}=15$

在$\triangle AQB$中，$\angle AQB=105^\circ$，$\overline{AB}^2=\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2-2\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}\cdot\cos 105^\circ$

$=[\dfrac{15\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}]^2+15^2-2\cdot\dfrac{15\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}\cdot15\cdot(-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})=225(4-\sqrt{3})$

$\therefore\quad \overline{AB}=15\sqrt{4-\sqrt{3}}$

9. 市郊有甲、乙、丙三家，兩兩相距 70 公尺、80 公尺、90 公尺，今計畫公設一井，使此井到三家必須等距，試求此距離_____公尺。



【解答】$21\sqrt{5}$ 公尺

【詳解】

SOL 一：

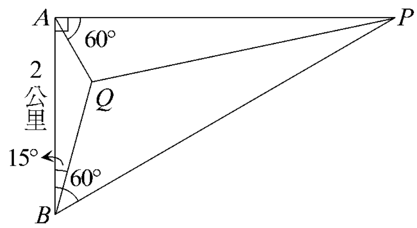
如圖：所求爲△ABC 之外接圓半徑 R，由餘弦定理知

$\cos B=\dfrac{70^2+80^2-90^2}{2\cdot70\cdot80}=\dfrac{2}{7}\quad\Rightarrow\quad\sin B=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}=\dfrac{90}{2R}\quad\Rightarrow\quad R=21\sqrt{5}$

SOL 二

$\Delta=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3}=\dfrac{7\cdot8\cdot9}{4R}\Rightarrow R=21\sqrt{5}$

10.某人在 A 處見建築物 P 在正東，建築物 Q 在東 60°南，又向南行 2 公里到 B 處，則 P 在北 60°東，Q 在北 15°東，求 $\overline{BP}=$___________，及 $\overline{PQ}=$__________。



【解答】$\overline{BP}=4$ 公里，$\overline{PQ}=\sqrt{10}$ 公里

【詳解】

在△ABP 中，$\overline{AB}=2$ 公里，$\angle PAB=90°$，$\angle ABP=60°$，則 $\overline{BP}=4$ 公里

在△ABQ 中，$\angle ABQ=15°$，$\angle BAQ=30°$，則 $\angle AQB=180°-15°-30°=135°$

$\therefore\quad\dfrac{\overline{BQ}}{\sin30°}=\dfrac{2}{\sin135°}\quad\Rightarrow\quad\overline{BQ}=\sqrt{2}$

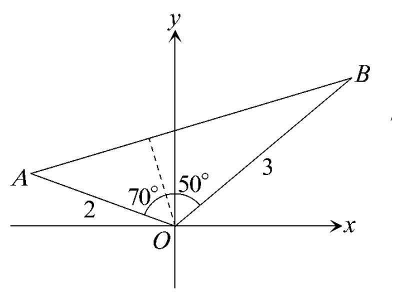
在△BPQ 中，$\overline{PQ}^2=\overline{BQ}^2+\overline{BP}^2-2\overline{BQ}\cdot\overline{BP}\cos45°=2+16-2\cdot\sqrt{2}\cdot4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10$

$\therefore\quad\overline{PQ}=\sqrt{10}$ 公里

11.一漁船在湖上等速直線前進，已知上午 9 時 50 分，漁船在觀測點 O 的北方偏西 70°，離 O 點 2 浬處，上午 10 時 10 分，則在觀測點 O 的北方偏東 50°，離 O 點 3 浬處。

(1)求此漁船的時速________浬。

(2)求這段時間內，漁船離觀測點 O 的最近距離________浬。



【解答】(1) $3\sqrt{19}$ 浬　(2) $\dfrac{3\sqrt{57}}{19}$ 浬

【詳解】

(1) $\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(70°+50°)=4+9+6=19$；

$\overline{AB}=\sqrt{19}$，時速 $\sqrt{19}\times\dfrac{60}{20}=3\sqrt{19}$ 浬

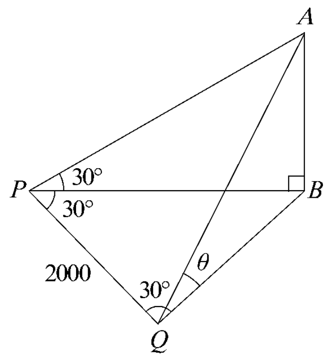
(2) $\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin120°=\dfrac{1}{2}\sqrt{19}\cdot D\quad\Rightarrow\quad d=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\dfrac{3\sqrt{57}}{19}$，漁船離觀測點的最近距離爲 $\dfrac{3\sqrt{57}}{19}$ 浬

12.兩觀測站 P，Q 相距 2000 公尺，今有一飛機恰巧飛到地面一大橋 B 的上空 A 點，此時，

由 P 測得飛機 A 的仰角爲 $30°$，而地面上 $\angle BPQ=\angle PQB=30°$，則飛機 A 的高度爲________公尺，此時在 Q 測飛機 A 的仰角應爲__________度。

【解答】飛機高度 $\dfrac{2000}{3}$ 公尺，在 Q 測 A 仰角 $30°$

【詳解】



在△BPQ 中，$\angle PBQ=180°-30°-30°=120°$，

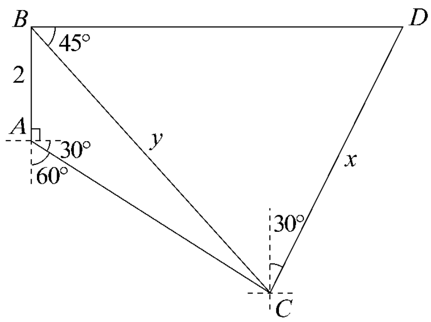
$\therefore\ \dfrac{\overline{PB}}{\sin 30°}=\dfrac{2000}{\sin 120°}\ \Rightarrow\ \overline{PB}=\dfrac{2000\sqrt{3}}{3}$

在△ABP 中，$\overline{AB}=\overline{PB}\tan 30°=\dfrac{2000\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2000}{3}$ (公尺)

$\angle BPQ=\angle PQB=30°$，$\overline{QB}=\overline{PB}=\dfrac{2000\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{QB}}=\dfrac{\frac{200}{3}}{\frac{2000\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°$，在 Q 測 A 仰角 $30°$

13.海岸上有 A，B 兩座燈塔，B 在 A 之正北 2 公里處，一船見 A 在北 $60°$西，B 在北 $45°$西，若此船依北 $30°$東方向行 20 分鐘後，見 B 在正西，求船速________ 公里／小時。



【解答】$6(\sqrt{3}+1)$公里／小時

【詳解】

如圖，船由 C 經 20 分鐘抵 D，令 $\overline{CD}=x$，$\overline{BC}=y$

$\therefore\ \angle ACB=15°$，$\angle BCD=75°$，$\angle BDC=60°$

△ABC 中，正弦定理，$\dfrac{y}{\sin 120°}=\dfrac{2}{\sin 15°}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$

△BCD 中，正弦定理 $\therefore\ \dfrac{x}{\sin 45°}=\dfrac{y}{\sin 60°}$

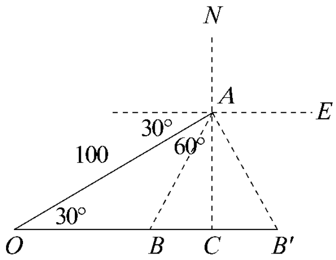
$\Rightarrow\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2(\sqrt{3}+1)$

20 分鐘走 $2(\sqrt{3}+1)$公里 $\Rightarrow$ 每小時走 $6(\sqrt{3}+1)$公里

14.設一颱風中心爲 O，下午 3 時被測出在 A 地南 $60°$西，距 A 地 100 公里的海上，正朝東以每小時 $\dfrac{50}{\sqrt{3}}$ 公里速度侵襲，且其暴風半徑爲 $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ 公里。假定這颱風半徑及行進方向與速度均不變，試預測於__________時 A 地會進入暴風圈，於__________時時可望脫離。

【解答】下午 5 時進入暴風圈，下午 7 時脫離

【詳解】



如圖，$\angle AOC = 30°$，$\overline{OA} = 100$ 公里，設t小時後颱風中心O到達點B並A地進入暴風圈內

此時，$\overline{AB} = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$，而$\overline{OB} = \dfrac{50t}{\sqrt{3}}$，故由餘弦定理，可得

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}\cos 30° \Rightarrow (\dfrac{100}{\sqrt{3}})^2 = 100^2 + (\dfrac{50t}{\sqrt{3}})^2 - 2 \cdot 100 \cdot \dfrac{50t}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore \quad t = 2$ 或$t = 4$

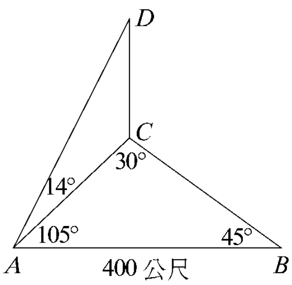
故知在下午 $3 + 2 = 5$ 時後進入暴風圈，下午 $3 + 4 = 7$ 時後脫離暴風圈

15.愛河岸A，B兩點距離爲 400 公尺，$\overline{CD}$爲新光 85大樓，D爲樓頂，C爲基底。若$\angle BAC = 105°$，由A測得D的仰角爲 14°，又$\angle ABC = 45°$，試求$\overline{CD}$高度__________公尺。

（已知$\sin 14° = \dfrac{1}{8}$，$\cos 14° = \dfrac{24}{25}$，$\tan 14° = \dfrac{1}{4}$）

【解答】$100\sqrt{2}$ 公尺

【詳解】

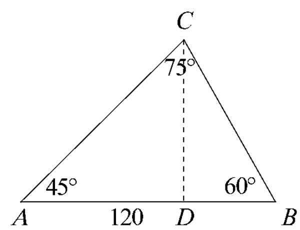


如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 105°$，$\angle ABC = 45°$，$\angle ACB = 30°$，

正弦定理：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 45°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin 30°} \Rightarrow \overline{AC} = \dfrac{400 \cdot \sin 45°}{\sin 30°} = 400\sqrt{2}$

$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD = 14°$，$\tan 14° = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow$ 樓高$\overline{CD} = \overline{AC}\tan 14° = 400\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{4} = 100\sqrt{2}$ 公尺

16.某生欲測一河流的寬度，在岸邊取二點 A，B，在對岸另取一點 C，並測得$\angle CAB = 45°$，$\angle CBA = 60°$，而$\overline{AB} = 120$ 公尺，求河寬__________公尺。



【解答】$60(3-\sqrt{3})$

【詳解】

$\triangle ABC$ 中 $\because \angle CAB = 45°$，$\angle CBA = 60°$，$\therefore \angle ACB = 75°$，

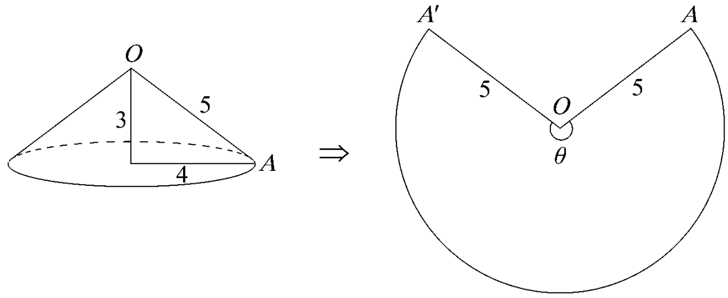
$\overline{AB} = 120$ 公尺，正弦定理：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin 75°} \Rightarrow \overline{AC} = \dfrac{120 \cdot \sin 60°}{\sin 75°} = 60\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\triangle ABC$ 中，河寬 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$，故 $\overline{CD} = \dfrac{\overline{AC}}{\sqrt{2}} = 60\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 60(3-\sqrt{3})$公尺

17.有一直圓錐，底半徑爲 4，高爲 3，現沿其斜高剪成一扇形，則此扇形中心角爲______弧度。

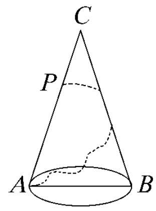
【解答】$\dfrac{8\pi}{5}$

【詳解】



$\overset{\frown}{AA'} = 5\theta = 8\pi \quad \therefore \quad \theta = \dfrac{8\pi}{5}$

18.如下圖：一直立圓錐之底圓直徑爲 5，斜高 $\overline{CA} = \overline{CB} = 15$，若 $\overline{CP} = 5$，一螞蟻

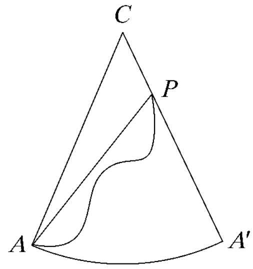


(1)從A點沿著錐面繞行一圈，至 $\overline{AC}$ 邊上之P點，則其最短路徑爲__________。

(2)從A點沿著錐面繞行一圈，回到A點，則其最短路徑爲__________。

【解答】(1)$5\sqrt{7}$ (2)15

【詳解】



(1)從 $\overline{AC}$ 剪開，展成一扇形，AA'弧長即爲底圓圓周 5π

$\overset{\frown}{AA'}$ 長 $= r\theta \Rightarrow 5\pi = 15\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \angle ACP = 60^\circ$

故最短路徑爲 $\overline{AP}$， 由餘弦定理得

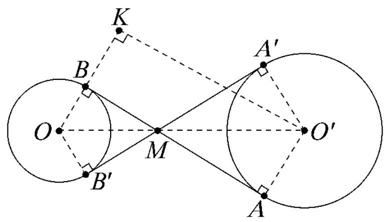
$\overline{AP}^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \overline{AP} = 5\sqrt{7}$

(2) $\angle ACP = 60^\circ \Rightarrow \Delta CAA'$ 爲正三角形，$\overline{AA'} = 15$

19.二圓輪之半徑分別爲 2、3，中心距離爲 10，以皮帶交叉緊繞二圓輪，則皮帶長爲__________。

【解答】$10\sqrt{3} + \dfrac{20}{3}\pi$

【詳解】



內公切線段長 $\overline{AB} = \overline{O'K} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{OK}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$

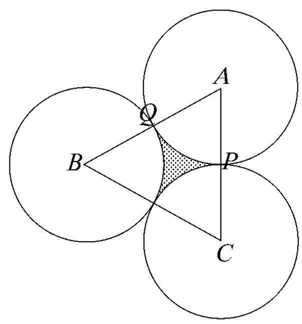
$\angle BOM = \angle AO'M = \dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$ 優角$\angle BOB' = \dfrac{4\pi}{3}$，且優角$\angle AO'A' = \dfrac{4\pi}{3}$

皮帶長 $= 2 \times 5\sqrt{3} + 2 \cdot \dfrac{4\pi}{3} + 3 \cdot \dfrac{4\pi}{3} = 10\sqrt{3} + \dfrac{20}{3}\pi$

20.半徑爲 1 的三個圓互相外切，則此三圓間所圍成的面積爲__________。

【解答】$\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}$

【詳解】

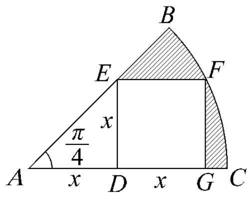


三圓間所圍成的面積就是陰影部分的面積

$=$ (正三角形ABC的面積) $-$ (三個扇形APQ的面積)

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-3\times\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$

21.扇形如圖，$\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$\overline{AB}=\sqrt{10}$，且$DEFG$爲內接正方形，求斜線部分面積＿＿＿＿＿＿＿＿。



【解答】$\dfrac{5\pi}{4}-3$

【詳解】

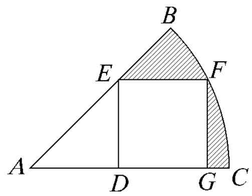
$\because \angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$\square DEFG$ 爲正方形，令 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{DG}=x$

在$\triangle AFG$ 中，

$\sqrt{10}=\overline{AF}=\sqrt{\overline{AG}^2+\overline{GF}^2}=\sqrt{(2x)^2+x^2}=\sqrt{5}x$，$x=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$

故所求斜線部分面積 $=$ 扇形 ABC 面積 $-$ $\triangle ADE-\square DEFG$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{10})^2-\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2=\dfrac{5\pi}{4}-3$



22.$\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}-\dfrac{\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)}{\cot(\pi+\theta)}-\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=$＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】

原式 $=\dfrac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\dfrac{-\cot\theta}{\cot\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}=1+1-1=1$

23.(1)$\dfrac{13\pi}{12}=$＿＿＿＿＿度。　(2)$216^\circ=$＿＿＿＿＿弧度。

【解答】(1)195°　(2) $\dfrac{6}{5}\pi$

【詳解】

(1)$\because$　1（弧度）$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$　$\therefore$　$\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}\times(\dfrac{180}{\pi})^\circ=195^\circ$

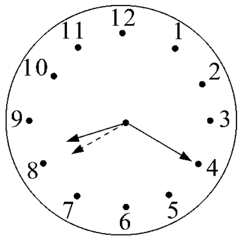
(2) $\because$　$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$（弧度）　$\therefore$　$216^\circ=216\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{6}{5}\pi$

24.鐘面上，8 點 20 分時，時針與分針的銳夾角

(1)度數爲 $=$＿＿＿＿＿。　(2)換算成弧度爲=＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 130°　(2)$\dfrac{13}{18}\pi$

【詳解】



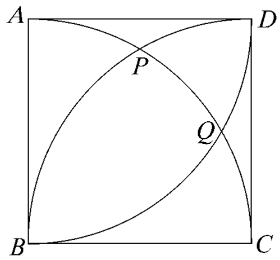
分針走了 20 分格，時針走 $20\times\frac{1}{12}$ 分格，即 $\frac{5}{3}$ 分格，且 1 分格

$=\frac{360°}{60}=6°$

時鐘在 8 點 20 分時，時針與分針共夾了 $[\,(40+\frac{5}{3})-20]\times 6°=130°$

即 $130\times\frac{\pi}{180}=\frac{13}{18}\pi$ 弧度

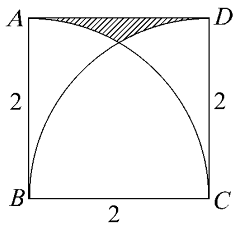
25.正方形$ABCD$邊長為 2，分別以A，B，C為圓心，2 為半徑，在正方形內部作三個圓弧如下圖，則



(1) $\overset{\frown}{BPD}$ 與 $\overset{\frown}{BQD}$ 兩弧圍成眼形區域面積為 $=$__________。

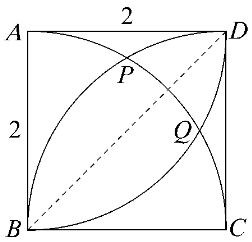
(2) $\overset{\frown}{BP}$，$\overset{\frown}{PC}$ 與 $\overline{BC}$ 圍成(粽子)區域面積為 $=$__________。

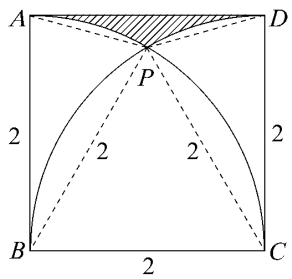
(3)下圖斜線部分面積為__________。

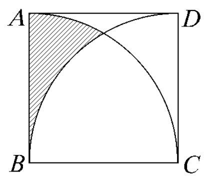


【解答】(1) $2\pi-4$　(2) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$　(3) $4-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

【詳解】







(1)弓形BPD面積 $=$ 扇形$C-\overset{\frown}{BD}$ 面積 $-$ $\triangle BCD$面積 $=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2^2=\pi-2$

故所求眼形區域面積 $=2(\pi-2)=2\pi-4$

(2)因為 $\overline{BC}=\overline{BP}=\overline{PC}=1$，$\angle PBC=\angle PCB=\frac{\pi}{3}$

所求區域面積

$=$ 扇形$B-\overset{\frown}{PC}$ $+$ 扇形$C-\overset{\frown}{PB}$ $-$ $\triangle BCP$

$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

(3) $\angle PBC=60°$　$\Rightarrow$　$\angle APB=75°$　$\Rightarrow$　$\angle APD=150°$，$\overline{AP}=\sqrt{6}-\sqrt{2}=\overline{PD}$

$\triangle APD=\frac{1}{2}\,\overline{AP}\cdot\overline{PD}\sin 150°=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}=2-\sqrt{3}$

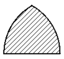
弦 $\overline{AP}$ 對應的弓形面積 $=\pi(2^2)\cdot\frac{30°}{360°}-\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin 30°=\frac{\pi}{3}-1$

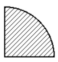
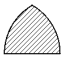
斜線部分面積 $=2-\sqrt{3}\ -2(\frac{\pi}{3}-1)=4-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

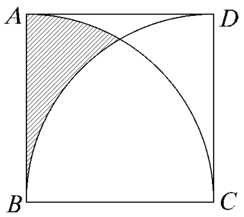
26.如下圖所示，邊長爲 1 之正方形$ABCD$中，以B，C爲圓心，1 爲半徑畫弧，求斜線部分之面積 $=$__________。

【解答】$\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{5\pi}{12}$

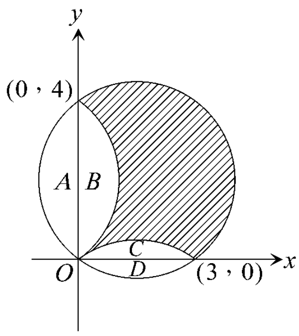
【詳解】

 $=2$  $-$ △ $=2\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

∴　所求面積 $=$  $-$  $=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot\pi-(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{5\pi}{12}$



27.如圖，弓形A與B全等，弓形C與D也全等，則斜線部分面積爲__________。 △



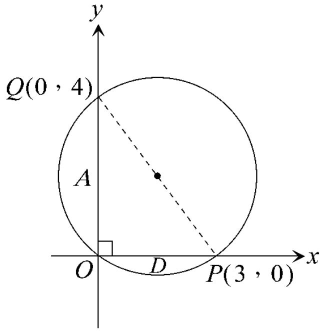
【解答】12

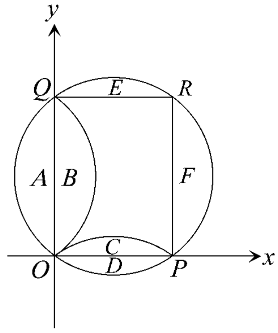
【解一】

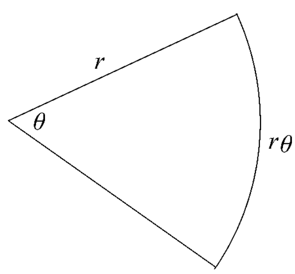
(1) $\overline{PQ}=5$，$\overline{PQ}$ 爲直徑

(2)弓形A與D的面積和 $=\frac{1}{2}\pi(\frac{5}{2})^2-\triangle OPQ=\frac{25}{8}\pi-6$

(3)斜線部分面積 $=$ 圓面積$-$弓形A，B，C，D面積$=\pi(\frac{5}{2})^2-2(\frac{25}{8}\pi-6)=\frac{25}{4}\pi-\frac{25}{4}\pi+12=$ 12







【解二】

如圖 $\because$ 弓形A，B，F面積相同；弓形C，D，E面積相同

$\therefore$ 所求斜線部分面積 = 矩形$OPRQ$面積 $=3\times4=12$

28.設一扇形之面積恆爲定值 8，試求

(1)扇形的最小周長__________。

(2)此時扇形的中心角 θ 之弧度__________。

【解答】(1) $8\sqrt{2}$ (2) 2

【詳解】

設扇形之圓半徑爲r，中心角爲θ，則面積$\frac{1}{2}r^2\theta=8$

扇形周長$p=2r+r\theta\geq2\sqrt{2r\cdot r\theta}=2\sqrt{2r^2\theta}=2\sqrt{2\times16}=8\sqrt{2}$

當 $2r=r\theta$時，周長$p=8\sqrt{2}$爲最小值，此時$\theta=2$

29.一扇形周長爲 6，當此扇形有最大面積時，其半徑爲__________，而圓心角爲__________弧度。而此扇形有最大面積爲__________。

【解答】$\frac{3}{2}$；2；$\frac{9}{4}$

【詳解】

設扇形半徑爲r，圓心角爲θ，則弧長爲$r\theta$

$\therefore$ 周長 $2r+r\theta=6$，面積$A=\frac{1}{2}r^2\theta$

由$A.M.\geq G.M.$知$\frac{2r+r\theta}{2}\geq\sqrt{2r\cdot r\theta}\Rightarrow\frac{6}{2}\geq\sqrt{2r^2\theta}$ $\Rightarrow$ $3\geq\sqrt{4A}$ $\therefore$ $9\geq4A$ $\Rightarrow$ $A\leq\frac{9}{4}$

當 $2r=r\theta$時，$A=\frac{9}{4}$爲最大面積，此時$\theta=2$ $\therefore$ $2r+2r=6$ $\Rightarrow$ $r=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$