高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.06.04					
範圍	2-5 正、餘弦定(2)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 在△ABC 中，∠A，∠B，∠C 之三對邊長分別爲 a，b，c，
若滿足 $3(a-b+c)=14(\sin A-\sin B+\sin C)$，則此三角形的外接圓半徑 $R=$
(A)$\frac{14}{3}$ (B)$\frac{7}{3}$ (C)$\frac{3}{14}$ (D)$\frac{3}{7}$ (E)21

【解答】(B)

【詳解】$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$

已知 $3(a-b+c)=14(\sin A-\sin B+\sin C)\Rightarrow\ a-b+c=\frac{14}{3}(\sin A-\sin B+\sin C)$，

$\therefore\ \ a-b+c=2R\,(\sin A-\sin B+\sin C)$，

$\therefore\ 2R\,(\sin A-\sin B+\sin C)=\frac{14}{3}(\sin A-\sin B+\sin C)\Rightarrow R=\frac{7}{3}$

2. △ABC 中，$\sin A$：$\sin B$：$\sin C=\sqrt{2}$ ：2：$(\sqrt{3}+1)$，則∠$A=$
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° (E) 135°

【解答】(A)

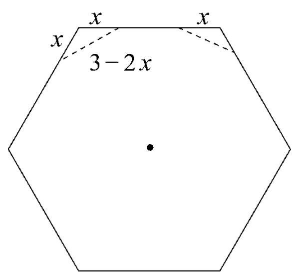
【詳解】(1)由正弦定理，a：b：$c=\sin A$：$\sin B$：$\sin C=\sqrt{2}\,k$：$2\,k$：$(\sqrt{3}+1)\,k$

(2)$\therefore\ \ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2k)^2+[(\sqrt{3}+1)k]^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\cdot\ 2k\cdot(\sqrt{3}+1)k}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∠$A=30°$

3. 有一邊長爲 3 的正六邊形紙板，今在每一個角各剪掉一個小三角形，使其成爲正十二邊形之紙板，則此正十二邊形之一邊長爲
(A) 1 (B)$\frac{3}{2}$ (C)$\sqrt{3}$ (D)$\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$ (E) $6\sqrt{3}-9$

【解答】(E)

【詳解】令所截去三角形的腰長爲x，則所得正十二邊形之一邊長爲 $3-2x$
如圖，由餘弦定理知$(3-2x)^2=x^2+x^2-2x\cdot x\cos120°$
$\therefore\ \ x^2-12x+9=0\ \ \therefore\ \ x=6\pm3\sqrt{3}$（加號不合）
故正十二邊形的邊長是 $3-2(6-3\sqrt{3})=6\sqrt{3}-9$



4. 滿足下列條件的△ABC，何者恰有一個？
(A)$a=4$，$b=10$，∠$A=30°$ (B) $a=6$，$b=10$，∠$A=30°$ (C) $a=6$，$b=10$，∠$A=150°$
(D) $a=12$，$b=10$，∠$A=150°$ (E) $a+b+c=4$，∠$A=30°$，∠$B=45°$

【解答】(D)(E)

【詳解】(A)$\because\ \ \sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{10}{4}\sin30°=\frac{10}{8}>1\ \ \ \therefore$ 無解

(B)$\because$ $\sin B=\dfrac{10}{6}\sin 30^\circ=\dfrac{10}{12}<1$，因$b>a$，$B>A$，故$\angle B\fallingdotseq 56^\circ$ 或 124° $\Rightarrow$ 有兩組解

(C)$\because$ $b>a$ $\Rightarrow$ $B>A=150^\circ$ $\therefore$ 無解

(D)$\because$ $\sin B=\dfrac{10}{12}\sin 150^\circ=\dfrac{10}{24}<1$，又 $b<a$ $\Rightarrow$ $B<A$，故$\angle B\fallingdotseq 25^\circ$，恰一組解

(E)$\because$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$\because$ $\angle A=30^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=105^\circ$，$a+b+c=4$ $\therefore$ a，b，c恰一組解

5. $\triangle ABC$ 中，若 $a+c=2b$，$3a+b=2c$，下列何者正確？

(A) $a:b:c=-3:-5:-7$ (B) $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ (C) $\angle C=60^\circ$ (D) $\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

(E) $\cos B=\dfrac{11}{14}$

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】

$\begin{cases}a-2b+c=0\\3a+b-2c=0\end{cases}$ $\quad\begin{matrix}-2 & & 1 & & 1 & & -2\\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & -2 & & 3 & & 1\end{matrix}$

$\therefore$ $a:b:c=3:5:7$ $\therefore$ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5}=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle C=120^\circ$

$\therefore$ $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin A=\dfrac{3}{7}\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{49+9-25}{2\cdot 7\cdot 3}=\dfrac{11}{14}$

二、填充題(每題 10 分)

1. $\triangle ABC$之三邊長分別為$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=7$，則

(1)$\triangle ABC$之內切圓半徑為______。(2)若$\angle A$之外角平分線交直線BC於D，則$\overline{AD}$長為____。

【解答】(1)$\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{70}$

【詳解】

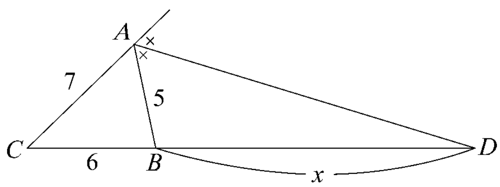
(1) $s=\dfrac{1}{2}(5+6+7)=9$

海龍公式：$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$

$\triangle=rs\Rightarrow$內切圓半徑 $r=\dfrac{\triangle}{s}=\dfrac{6\sqrt{6}}{9}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

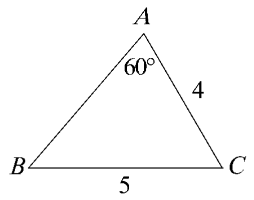
(2)外分比 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x+6}{x}=\dfrac{7}{5}$ $\Rightarrow$ $\overline{BD}=x=15$

$\triangle ABC$ 及$\triangle ACD$ 中，餘弦定理 $\cos C=\dfrac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\dfrac{7^2+21^2-\overline{AD}^2}{2\cdot 7\cdot 21}\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{280}=2\sqrt{70}$



2. $\triangle ABC$中，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=5$，$\angle A=60°$，則$\overline{AB}$之長為__________。

【解答】$2+\sqrt{13}$



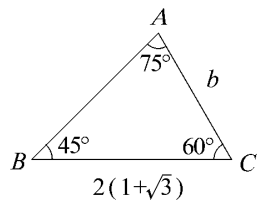
【詳解】餘弦定理 $\cos 60° = \dfrac{16+\overline{AB}^2-25}{2\cdot 4\cdot \overline{AB}}$

$\Rightarrow\quad 4\overline{AB}=\overline{AB}^2-9\quad\Rightarrow\quad \overline{AB}^2-4\overline{AB}-9=0$

$\Rightarrow\quad \overline{AB}=\dfrac{4\pm\sqrt{16+36}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{13}}{2}=2\pm\sqrt{13}$（負不合），$\overline{AB}=2+\sqrt{13}$

3. $\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$a=2(1+\sqrt{3})$，求$\triangle ABC$的面積__________。

【解答】$2(3+\sqrt{3})$



【詳解】

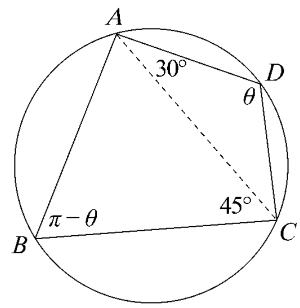
正弦定理：$\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{\sin 75°}=\dfrac{b}{\sin 45°}\quad\Rightarrow\quad \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{b}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\quad\Rightarrow\quad b=4$

$\therefore\quad \triangle ABC$ 之面積$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2(1+\sqrt{3})\times\sin 60°=2(3+\sqrt{3})$

4. 設圓內接四邊形$ABCD$中，$\angle CAD=30°$，$\angle ACB=45°$，$\overline{CD}=2$，試求：

(1) $\overline{AB}$ 之長 $=$__________。 (2)劣弧$\overset{\frown}{CD}$的弧長 $=$__________。

【解答】(1) $2\sqrt{2}$ (2) $\dfrac{2\pi}{3}$



【詳解】

(1)設$\angle ADC=\theta$，$\angle ABC=\pi-\theta$

在$\triangle ACD$ 中，$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin 30°}$ ……..①

在$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}$ ……..②

由①② $\Rightarrow \dfrac{2}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}\quad\Rightarrow\quad \overline{AB}=\dfrac{2\sin 45°}{\sin 30°}=2\sqrt{2}$

(2)$\triangle ACD$ 之外接圓半徑 $2R=\dfrac{2}{\sin 30°}\quad\Rightarrow\quad R=2$，又$\angle CAD=30°=\dfrac{\pi}{6}$

則劣弧$\overset{\frown}{CD}$之圓心角為$\dfrac{\pi}{6}\times 2=\dfrac{\pi}{3}$，劣弧$\overset{\frown}{CD}$之長 $=$半徑×弧度 $=2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$

5. $\triangle ABC$之三邊長為 8，10，12，則

(1)$\triangle ABC$之面積為__________。 (2)$\triangle ABC$之外接圓半徑為__________。

(3)$\triangle ABC$最大邊上之中線長為__________。

【解答】(1) $15\sqrt{7}$ (2) $\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$ (3) $\sqrt{46}$

【詳解】

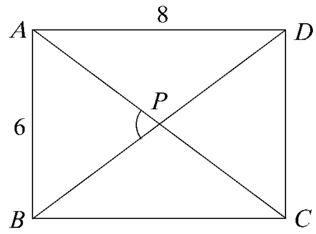
(1) 由海龍公式 $s=\dfrac{1}{2}(8+10+12)=15$，$\triangle=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=15\sqrt{7}$

(2)由△$=\dfrac{abc}{4R}$ $\Rightarrow$ $15\sqrt{7}=\dfrac{8\times10\times12}{4R}$ $\Rightarrow$ $R=\dfrac{240}{15\sqrt{7}}=\dfrac{16\sqrt{7}}{7}$

(3)最大邊上之中線長 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\cdot8^2+2\cdot10^2-12^2}=\sqrt{46}$

6. 長方形$ABCD$，令$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於P點，求$\cos\angle APB=$________。

【解答】$\dfrac{7}{25}$

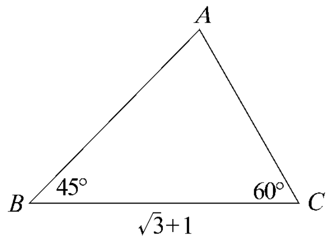


【詳解】

$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=8$，$\overline{AC}=\overline{BD}=10$，$\therefore\ \overline{AP}=\overline{BP}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=5$

$\Rightarrow$ $\cos\angle APB=\dfrac{5^2+5^2-6^2}{2\times5\times5}=\dfrac{14}{2\times5\times5}=\dfrac{7}{25}$

7. △ABC中，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$a=\sqrt{3}+1$，求$\overline{AB}$的值 $=$________，外接圓半徑 $=$______。



【解答】$\sqrt{6}$ ，$\sqrt{2}$

【詳解】

$\angle B=45°$，$\angle C=60°$ $\Rightarrow$ $\angle A=75°$

由正弦定理知$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\dfrac{\overline{BC}\sin C}{\sin A}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin60°}{\sin75°}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}$

又 $2R=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $R=\dfrac{\overline{AB}}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

8. 若△ABC的三邊分別爲 4，5，7，試求出

(1)△ABC的面積 $=$__________。 (2)內切圓半徑 $=$__________。

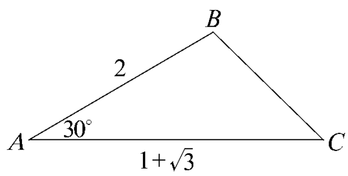
【解答】(1) $4\sqrt{6}$ (2)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【詳解】

(1)海龍公式$s=\dfrac{1}{2}(4+5+7)=8$，△$ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}=4\sqrt{6}$

(2) $\triangle=rs\Rightarrow r=\dfrac{\triangle}{s}=\dfrac{4\sqrt{6}}{8}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

9. 設△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{CA}=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，則$\overline{BC}$的長度爲_，$\angle C$的大小爲____度。



【解答】$\sqrt{2}$；45°

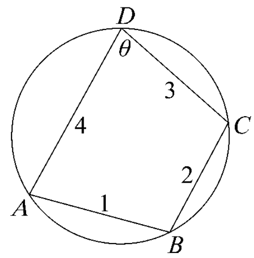
【詳解】

(1)餘弦定理$\overline{BC}^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot2\cdot(1+\sqrt{3})\cos30°=4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})=2$

$\therefore$ $\overline{BC}=\sqrt{2}$

(2)正弦定理$\dfrac{2}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}\Rightarrow \sin C=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，且$b=1+\sqrt{3}>2=c$，$\angle C$爲銳角 45°

10.設四邊形$ABCD$內接於一圓且$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則$\overline{AC}=$__________，□$ABCD$的面積爲__________。



【解答】$\sqrt{\dfrac{55}{7}}$；$2\sqrt{6}$

【解 1】

如圖：設$\angle ADC=\theta$，則$\angle ABC=180^\circ-\theta$，由餘弦定理知

$\overline{AC}^2=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\theta=25-24\cos\theta$……①

$\overline{AC}^2=1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\cos(180^\circ-\theta)=5+4\cos\theta$……②

消去$\cos\theta$，① + ② × 6，$7\overline{AC}^2=25+30=55 \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{\dfrac{55}{7}}$

$\overline{AC}^2=\dfrac{55}{7}$代入② $\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{5}{7} \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

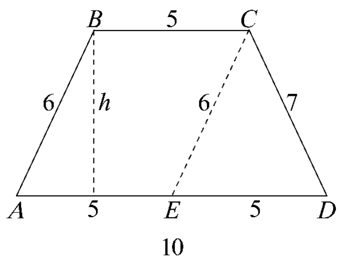
∴ 四邊形$ABCD$之面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin\theta=2\sqrt{6}$

【另解】利用公式：

圓內接四邊形之邊長分別爲a，b，c，d，則

面積 $=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}=\sqrt{4\cdot3\cdot2\cdot1}=2\sqrt{6}$，其中，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$

11.梯形$ABCD$上底$\overline{BC}=5$，下底$\overline{AD}=10$，兩腰$\overline{AB}=6$，$\overline{CD}=7$，則$\cos A=$__________，而梯形$ABCD$的面積爲__________。



【解答】$\dfrac{1}{5}$；$18\sqrt{6}$

【詳解】

如圖：過C作$\overline{AB}$之平行線交$\overline{AD}$於E，則

$\overline{CE}=6$，$\overline{DE}=10-5=5$，$\angle CED=\angle A$

△CED中，餘弦定理 $\cos A=\cos\angle CED=\dfrac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{1}{5} \Rightarrow \sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow$ 由$\sin A=\dfrac{h}{\overline{AB}}\Rightarrow$梯形$ABCD$之高$h=\overline{AB}\sin A=6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{12\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow$ 面積 $=\dfrac{1}{2}(5+10)\cdot h=\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{12\sqrt{6}}{5}=18\sqrt{6}$

12.△ABC中，$a=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{3}+1$，$\angle A=15^\circ$，則$b=$__________。

【解答】$2\sqrt{2}$或$\sqrt{6}$

【詳解】$(\sqrt{3}-1)^2=(\sqrt{3}+1)^2+b^2-2b(\sqrt{3}+1)\cos15^\circ$

$\Rightarrow 4-2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}+b^2-2b(\sqrt{3}+1)\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=4+2\sqrt{3}+b^2-\sqrt{2}(2+\sqrt{3})b$

$\Rightarrow b^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{6})b+4\sqrt{3}=0 \Rightarrow (b-2\sqrt{2})(b-\sqrt{6})=0 \Rightarrow b=2\sqrt{2}$或$\sqrt{6}$

13.△ABC中，若$(b+c)$：$(c+a)$：$(a+b)=7$：8：9，則$\sin B$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{4}{5}$

【詳解】

(1)令 $b+c=7k$，$c+a=8k$，$a+b=9k \quad \Rightarrow \quad a+b+c=12k$， $\therefore \quad a=5k$，$b=4k$，$c=3k$

(2)$\therefore \quad \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin B=\dfrac{4}{5}$

14.△ABC中，若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，則

(1) $\cos A=$__________。 (2) $\angle A=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{1}{2}$ (2) $60°$

【詳解】

$(a+b+c)(b+c-a)=3bc \Rightarrow (b+c)^2-a^2=3bc \Rightarrow b^2+2bc+c^2-a^2=3bc \Rightarrow b^2+c^2-a^2=bc$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle A=60°$

15.△ABC中，$a=2$，$b=3$，$c=4$，h_a表a邊之高，m_c表$c=\overline{AB}$ 邊之中線長，求

(1)△ABC之面積 $=$__________。 (2) $h_a=$__________。 (3) $m_c=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ (2)$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ (3)$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

【詳解】

(1) $s=\dfrac{2+3+4}{2}=\dfrac{9}{2} \quad \therefore \quad \triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

(2)$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot h_a \quad \Rightarrow \quad h_a=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

(3) $m_c=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(4+9)-16}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

16.△ABC中，h_a，h_b，h_c分別表a，b，c邊之高，且$h_a=20$，$h_b=15$，$h_c=12$，則$(a$，b，$c)=$_

。

【解答】(15，20，25)

【詳解】

a：b：$c=\dfrac{1}{h_a}$：$\dfrac{1}{h_b}$：$\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{20}$：$\dfrac{1}{15}$：$\dfrac{1}{12}=3$：$4$：$5$

$\therefore \quad \angle C=90°$且$a=\overline{BC}=h_b=15$，$b=\overline{AC}=h_a=20$，$c=\overline{AB}=25$

17.已知△ABC內接於半徑爲R的一個圓，且 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=120°$，則 $\overline{BC}=$__________，

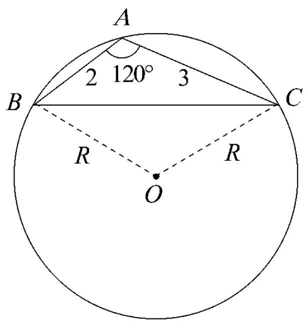
$R=$__________。

【解答】$\sqrt{19}$ ，$\dfrac{\sqrt{57}}{3}$

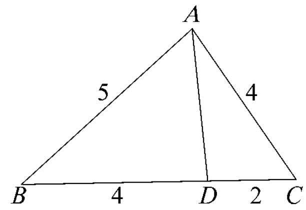
【詳解】

$\overline{BC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 120° = 4 + 9 + 6 = 19$，$\overline{BC} = \sqrt{19}$

在△ABC中，$2R = \dfrac{\sqrt{19}}{\sin 120°} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{19}}{2\sin 120°} = \dfrac{\sqrt{19}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$



18.設△ABC 中，$\overline{AB} = 5$，$\overline{BC} = 6$，$\overline{AC} = 4$。在 $\overline{BC}$ 上取一點 D 使得 $\overline{BD}$ ：$\overline{DC} = 2:1$，試求 $\overline{AD}$ 之值__________。



【解答】$\sqrt{11}$

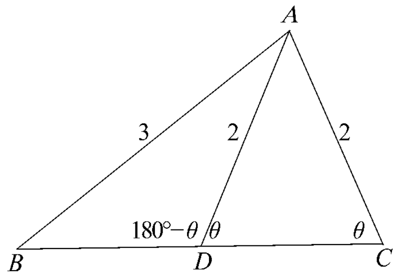
【詳解】

$\overline{BC} = 6$，且 $\overline{BD}$ ：$\overline{DC} = 2:1 \Rightarrow \overline{BD} = 4$，

△ABC中，$\cos B = \dfrac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2\cdot 6\cdot 5} = \dfrac{3}{4}$

△ABD中，$\overline{AD}^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cos B = 25 + 16 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot \dfrac{3}{4} = 11$，$\overline{AD} = \sqrt{11}$

19.在△ABC 中，$\overline{AB}$ ：$\overline{AC} = 3:2$，在 $\overline{BC}$ 上取一點 D 使 $\overline{AD} = \overline{AC}$，試求△$ABC$，△$ABD$，△$ACD$ 的外接圓半徑比=______________________。



【解答】3：3：2

【詳解】

如圖，令R，R_1，R_2分別為△ABC，△ABD，△ACD外接圓的半徑，則

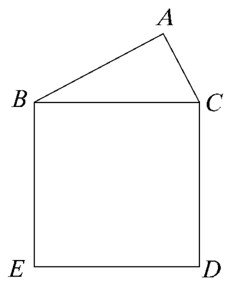
(1)△ABC中，正弦定理：$R = \dfrac{c}{2\sin\theta} = \dfrac{3}{2\sin\theta}$

(2)△ABD中，$R_1 = \dfrac{c}{2\sin\angle ADB} = \dfrac{3}{2\sin(180° - \theta)} = \dfrac{3}{2\sin\theta}$

(3)△ACD中，$R_2 = \dfrac{b}{2\sin\angle ADC} = \dfrac{3}{2\sin\theta}$

三外接圓的半徑比為$R：R_1：R_2 = \dfrac{3}{2\sin\theta}:\dfrac{3}{2\sin\theta}:\dfrac{2}{2\sin\theta} = 3:3:2$

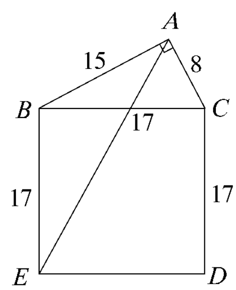
20.△ABC 中，$\overline{AB} = 15$，$\overline{BC} = 17$，$\overline{CA} = 8$，$BCDE$ 是正方形，如圖，試求：



(1) $\cos\angle ABE$=__________。　(2)△ABE 的面積=____________。

【解答】(1) $-\dfrac{8}{17}$　(2) $\dfrac{225}{2}$

【詳解】



(1) $\cos\angle ABE = \cos(90° + \angle ABC) = -\sin\angle ABC = -\dfrac{8}{17}$

（ $8^2 + 15^2 = 17^2 \quad\Rightarrow\quad \angle A = 90°$）

(2) $\sin\angle ABE = \sqrt{1 - (-\dfrac{8}{17})^2} = \dfrac{15}{17}$，△$ABE$面積 $= \dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot 17\cdot \dfrac{15}{17} = \dfrac{225}{2}$

21.設△ABC 中，已知 $a=14$，$b=10$，$c=6$，試求△ABC 之

(1)面積=＿＿＿＿＿。　(2)外接圓的半徑=＿＿＿＿＿。

(3) $\overline{BC}$ 邊上的中線=＿＿＿＿＿。　(4)最大內角的度量=＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $15\sqrt{3}$　(2) $\frac{14}{3}\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{19}$　(4) $\angle A=120°$

【詳解】

(1) $a=12$，$b=10$，$c=6$ $\Rightarrow$ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=15$，由海龍公式△=$\sqrt{15\cdot1\cdot5\cdot9}=15\sqrt{3}$

(2)《方法 1》

由餘弦定理$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{100+36-196}{2\cdot10\cdot6}=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle A=120°$

由正弦定理$a=2R\sin A$ $\Rightarrow$ $14=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $R=\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

《方法 2》由△=$\frac{abc}{4R}$ $\Rightarrow$ $15\sqrt{3}=\frac{14\cdot10\cdot6}{4R}$ $\Rightarrow$ $R=\frac{60\cdot14}{60\sqrt{3}}=\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

(3) $\overline{BC}$ 邊上之中線=$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{200+72-196}=\sqrt{19}$

(4)最大邊爲a $\Rightarrow$ 最大角$\angle A=120°$

22.設△ABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，已知 $a-2b+c=0$，$5a+4b-5c=0$。

(1)求 $\sin A$：$\sin B$：$\sin C$=＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)求 $\cos A$=＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(3)若周長爲 30，求△ABC 的面積=＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 3：5：7　(2) $\frac{13}{14}$　(3) $15\sqrt{3}$

【詳解】

(1) $\begin{cases}a-2b+c=0\\5a+4b-5c=0\end{cases}$

消去 c $\Rightarrow$ $10a-6b=0$ $\Rightarrow$ $a:b=3:5$，

消去 b $\Rightarrow$ $7a-3c=0$ $\Rightarrow$ $a:c=3:7$

$\Rightarrow$ $a:b:c=3:5:7$

∴ $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+49-9}{2\cdot5\cdot7}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$

(3)若 $a+b+c=30$，則 $a=6$，$b=10$，$c=14$ $\Rightarrow$ $s=15$ $\Rightarrow$ △=$\sqrt{15\cdot9\cdot5\cdot1}=15\sqrt{3}$