<table>
<tr><td colspan="7">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：97.04.21</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-1、2 三角函數基本關係</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)設 $0° < \theta < 90°$，且 $\tan\theta = k$，下列何者正確？

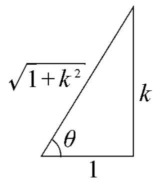
(A) $\sin\theta = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$　(B) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$　(C) $\cot\theta = \dfrac{1}{k}$

(D) $\sec\theta = \sqrt{k^2+1}$　(E) $\csc\theta = \sqrt{k^2+1}$

【解答】(A)(B)(C)(D)

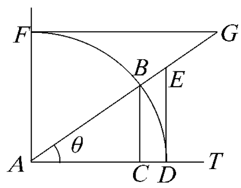
【詳解】

$\tan\theta = \dfrac{k}{1} \Rightarrow$



$\sin\theta = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$\tan\theta = k$，$\cot\theta = \dfrac{1}{k}$，$\sec\theta = \sqrt{1+k^2}$，$\csc\theta = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

2. (複選)如圖，以 A 為圓心，1 為半徑作一個圓，此圓過 D，B，F 三點，若 $\overline{BC}$，$\overline{ED}$，$\overline{FA}$ 都垂直 $\overline{AT}$，$\overline{FG} \perp \overline{FA}$，$\angle BAC = \theta$，則下列敘述何者正確？



(A) $\overline{AC} = \cos\theta$　(B) $\overline{DE} = \tan\theta$　(C) $\overline{AE} = \sec\theta$

(D) $\overline{FG} = \cot\theta$　(E) $\overline{AG} = \csc\theta$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$\because$ $\overline{FA} \perp \overline{AT}$，$\overline{FG} \perp \overline{FA}$　$\therefore$ $\overline{FG} // \overline{AT}$　$\therefore$ $\angle FGA = \angle GAT = \theta$

(A) ΔABC 中，$\cos\theta = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ $\Rightarrow$ $\overline{AC} = \overline{AB}\cos\theta = \cos\theta$

(B) ΔADE 中，$\tan\theta = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{DE}}{1} = \overline{DE}$　(C) ΔADE 中，$\sec\theta = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \overline{AE}$

(D) ΔAFG 中，$\cot\theta = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{AF}} = \overline{FG}$　(E) ΔAFG 中，$\csc\theta = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \overline{AG}$

3. 化簡 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} =$？(A) $2\sin\theta$　(B) $2\cos\theta$　(C) $2\sec\theta$　(D) $2\csc\theta$　(E) $2\tan\theta$

【解答】(D)

【詳解】

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{2}{\sin\theta} = 2\csc\theta$$

二、填充題(每題 10 分)

1. 求$\tan^2 44°\tan^2 46° - \cot^2 46° + \csc^2 46°$的值 =__________。

【解答】2

【詳解】

$$\tan^2 44°\tan^2 46° - \cot^2 46° + \csc^2 46° = \tan^2 44°\cot^2 44° + (\csc^2 46° - \cot^2 46°) = 1 + 1 = 2$$

2. $\cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60° =$ __________。

【解答】$\frac{5}{4}$

【詳解】

$$\cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60° = \cos^2 40° + \cos^2(90° - 40°) + \cos^2 60°$$
$$= \cos^2 40° + \sin^2 40° + (\frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

3. $\log_2\sin 30° + \log_2\cos 30° + \log_2\tan 30° =$ __________。

【解答】-2

【詳解】

原式 $= \log_2\sin 30°\cos 30°\tan 30° = \log_2\sin^2 30° = \log_2(\frac{1}{2})^2 = -2$

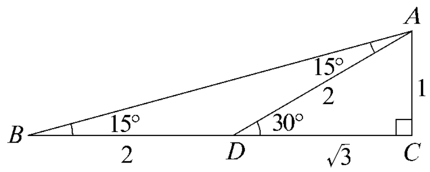
4. 設$\tan\theta = \frac{1}{3}$，則$\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta}$之值爲__________。

【解答】$\frac{13}{5}$

【詳解】

$$\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta} = \frac{\frac{3\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{4\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{3 + 4\tan\theta}{1 + 2\tan\theta} = \frac{3 + 4\cdot\frac{1}{3}}{1 + 2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{13}{5}$$

5. (1) $\tan 15° =$ __________。 (2) $\sin 15° =$ __________。



【解答】(1) $2 - \sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

【詳解】

作直角三角形 ABC，使$\angle C = 90°$，$\angle A = 15°$，又作$\angle BAD = \angle B$，D 在$\overline{BC}$上，則$\angle ADC = 30°$

令$\overline{AC} = 1$，則$\overline{AD} = 2 = \overline{BD}$ ，$\overline{CD} = \sqrt{3}$

$\therefore\ \tan 15° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ ，

$\overline{AB} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$\sin 15° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

6. $\dfrac{2\log\tan 60°+\log\tan 45°-3\log\sin 30°+\log 5}{1+\dfrac{1}{2}\log 36+2\log\sec 45°-2\log\cot 45°}$ 之值爲 ＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】原式 $=\dfrac{2\log\sqrt{3}+\log 1-3\log\dfrac{1}{2}+\log 5}{1+\log 6+\log(\sqrt{2})^2-2\log 1}=\dfrac{\log 3+\log 8+\log 5}{\log 10+\log 6+\log 2}=\dfrac{\log(3\cdot 8\cdot 5)}{\log(10\cdot 6\cdot 2)}=\dfrac{\log 120}{\log 120}=1$

7. sin15°．cos15°．tan15°．cot15°．sec15°．csc15°之值爲 ＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】由倒數關係得知 sin15°．cos15°．tan15°．cot15°．sec15°．csc15°

= (sin15°．csc15°)(cos15°．sec15°)(tan15°．cot15°) = 1．1．1 = 1

8. $\triangle ABC$中，$\angle A+\angle B=90°$，$\sin A=\dfrac{2}{3}$，則(1) $\cot A=$ ＿＿＿＿＿。 (2) $\csc B=$＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (2) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

【詳解】$\sin A=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\cot A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；$\csc B=\sec A=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

9. 求下列各式的值：

(1) $1-\sin^2 45°-\tan 30°\cot 60°+\sin^2 38°+\sin^2 52°=$＿＿＿＿＿。

(2) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\sec\theta}+\dfrac{1}{1+\csc\theta}=$＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{7}{6}$ (2) 2

【詳解】

(1)原式 $=1-(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+(\sin^2 38°+\cos^2 38°)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{7}{6}$

(2)原式 $=\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin\theta}}$

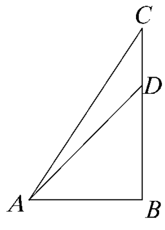
$=(\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta})+(\dfrac{1}{1-\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\cos\vartheta-1})=1+1=2$

10. sin27°．csc27° + tan38° − cot52° = ＿＿＿＿＿。

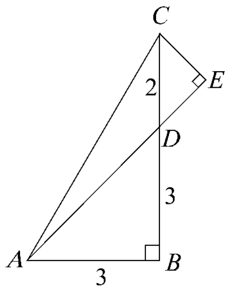
【解答】1

【詳解】原式 = 1 + tan38° − tan38° = 1

11.如圖，$\angle B=90°$，$3\overline{CD}=2\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，則$\tan\angle CAD$之值爲 ＿＿＿＿＿。



【解答】$\dfrac{1}{4}$



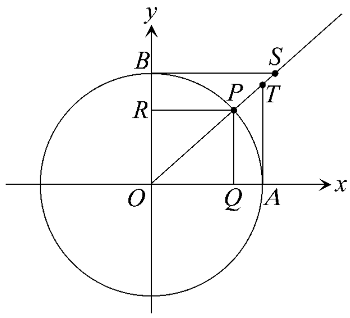
【詳解】

令 $\overline{AB}=\overline{BD}=3$，而 $3\overline{CD}=2\overline{BD}$ $\quad\therefore\quad \overline{CD}=2$

作 $\overline{CE}\perp\overline{AE}$（如圖） $\quad\because\quad \angle CDE=\angle ADB=45^\circ \quad\therefore\quad \overline{CE}=\sqrt{2}$

$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2} \quad\therefore\quad \tan\angle CAD$

$=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}$



12.如圖，$\overline{PQ}$，$\overline{TA}$ 都垂直x軸，$\overline{PR}$，$\overline{SB}$ 都垂直y軸，A，T，B在圓上，已知 $\overline{AT}=\dfrac{3}{5}$，$\overline{OP}=1$，則 $\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}$ 之值爲 ________ 。

【解答】$\dfrac{10}{3}$

【詳解】

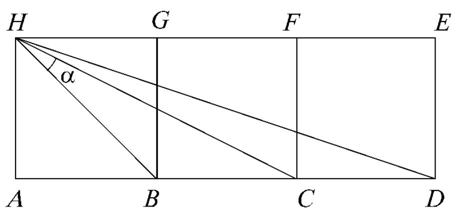
令 $\theta=\angle TOA=\angle OSB$ ，

$\tan\theta=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\quad \sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$，$\cot\theta=\dfrac{5}{3}$，$\sec\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

ΔOPQ 中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}\Rightarrow\overline{OQ}=\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$；

ΔOBS 中，$\csc\theta=\dfrac{\overline{OS}}{\overline{OB}}\Rightarrow\overline{OS}=\csc\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$ ；$\cot\theta=\dfrac{\overline{BS}}{\overline{OB}}\Rightarrow\overline{BS}=\cot\theta=\dfrac{5}{3}$

$\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\cdot\dfrac{\sqrt{34}}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$

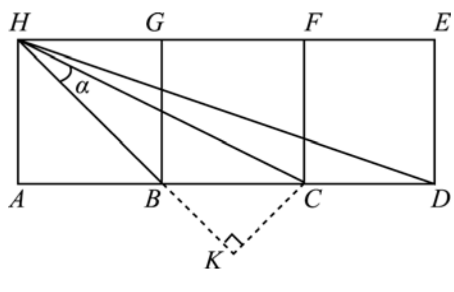


13.如右圖所示：□$ABGH$，□$BCFG$ 及□$CDEF$ 皆爲正方形，設$\angle BHC=\alpha$，試求：

(1) $\tan\alpha$之值=______________ 。

(2)$\angle BCH+\angle CDH$ 之值=_______________ 。

【解答】(1)$\dfrac{1}{3}$ (2) 45°



【詳解】

(1)過 C 作$\overline{CK}\perp\overline{HB}$於 K，設 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$

則 $\angle ABH=\angle KBC=45^\circ$ ，$\overline{HB}=\sqrt{2}$ ，$\overline{BK}=\overline{CK}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，

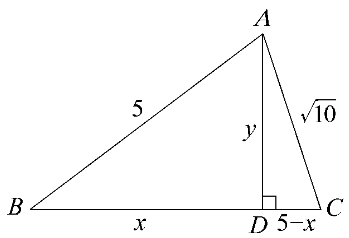
$\overline{HC}=\sqrt{5}$ ，$\overline{HK}=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{\overline{CK}}{\overline{HK}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3}$

(2) $\tan\angle CDH=\dfrac{1}{3}$ ，$\therefore\alpha=\angle CDH$， 又$\angle BCH=\angle CHE$ (內錯角)

$\therefore\quad \angle BCH+\angle CDH=\alpha+\angle CHE=\angle BHE=45^\circ$

14.$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=\sqrt{10}$，試求 $\sin B$ 與 $\cos C$。

【解答】$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$



【詳解】

(1)過 A 作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D，設 $x=\overline{BD}$，$y=\overline{AD}$，則 $\overline{DC}=5-x$

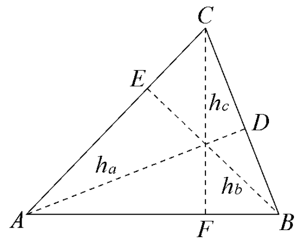
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \cdots\cdots ① \\ (5-x)^2+y^2=10 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ① − ② $10x-25=15$ $\Rightarrow$ $x=4$，$y=3$

(2) $\overline{BD}=4$，$\overline{AD}=3$，$\overline{DC}=1$，$\sin B=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{5}$，$\cos C=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

15.設$\triangle ABC$之三邊長為a，b及c，其對應三高為h_a，h_b及h_c。

已知$\tan A=1$，$\tan B=2$ 及$\tan C=3$，試求 $\dfrac{abc}{h_ah_bh_c}$ 之值=____________。



【解答】$\dfrac{5}{3}$

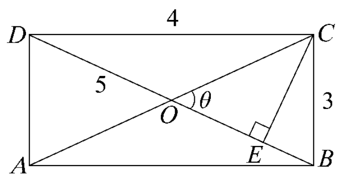
【詳解】

$\tan A=1$，$\tan B=2$ 及 $\tan C=3$，故知$\triangle ABC$ 為銳角三角形

由三角函數的定義可得 $\csc A=\sqrt{2}$，$\csc B=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $\csc C=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

得 $\dfrac{abc}{h_ah_bh_c}=\dfrac{a}{h_b}\cdot\dfrac{b}{h_c}\cdot\dfrac{c}{h_a}=\csc C\cdot\csc A\cdot\csc B=\dfrac{\sqrt{10}}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5}{3}$

16.長方形 $ABCD$ 的兩邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 的長分別為 4，3，若兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 所夾的銳角為θ，求 $\sin\theta$=__________ 及 $\tan\theta$ =____________。



【解答】$\sin\theta=\dfrac{24}{25}$，$\tan\theta=\dfrac{24}{7}$

【詳解】

如圖所示：長方形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 所夾的銳角θ，作 $\overline{CE}\perp\overline{BD}$

$\because$母子相似$\triangle BCE\sim\triangle BDC$，而 $\overline{BD}=5$，故 $\overline{BC}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BD}$，$\overline{BE}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{BD}}=\dfrac{9}{5}$

又因為 $\overline{DE}=\overline{DB}-\overline{BE}=5-\dfrac{9}{5}=\dfrac{16}{5}$，又 $\overline{CE}^2=\overline{BE}\cdot\overline{ED}=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{16}{5}\Rightarrow\overline{CE}=\dfrac{12}{5}$

在$\triangle OCE$ 中， $\sin\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{OC}}=\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{24}{25}$，$\tan\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{OE}}=\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{10}}=\dfrac{24}{7}$

17.已知一菱形的夾角是 60°，邊長為 20 公分，試求此菱形的面積 =______________。

【解答】$200\sqrt{3}$

【詳解】菱形的面積$=20\times20\times\sin60^\circ=20\times20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=200\sqrt{3}$

18.已知 $0° \le \theta \le 90°$ 且 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3}\sqrt{17}$ ，則

(1) $\tan\theta + \cot\theta =$__________。 (2) $\sin\theta - \cos\theta =$__________。(3)$\sin\theta =$__________。

【解答】(1) $\frac{9}{4}$ (2) $\pm\frac{1}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{17}\pm 1}{6}$

【詳解】

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \Rightarrow (\frac{1}{3}\sqrt{17})^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$

(1)$\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

(2) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\times\frac{4}{9} = \frac{1}{9} \quad \therefore \quad \sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$

(3) $\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{3} \\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{17}+1}{6}$ 或 $\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{3} \\ \sin\theta - \cos\theta = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{17}-1}{6}$

19.求 $\cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60° + \cos^2 70° + \cos^2 80°$ 的值 $=$__________。

【解答】4

【詳解】

$\cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60° + \cos^2 70° + \cos^2 80°$

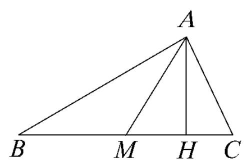
$= (\cos^2 10° + \cos^2 80°) + (\cos^2 20° + \cos^2 70°) + (\cos^2 30° + \cos^2 60°) + (\cos^2 40° + \cos^2 50°)$

$= (\sin^2 80° + \cos^2 80°) + (\sin^2 70° + \cos^2 70°) + (\sin^2 60° + \cos^2 60°) + (\sin^2 50° + \cos^2 50°)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

20. $\triangle ABC$ 中，若 $\cos B = \frac{4}{5}$ ，$\cos C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，$\overline{BC}$ 邊上之高 $\overline{AH}$ ，中線 $\overline{AM}$ ，

若 $\overline{MH} = 5$，則 $\overline{AH} =$ ______，$\triangle ABC$ 的面積 $=$ ______，$\overline{AB} =$ ______。



【解答】12；132；20

【詳解】

由 $\cos B = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{3}{5}$，$\tan B = \frac{3}{4}$；$\cos C = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cot C = \frac{1}{2}$

$\tan B = \frac{3}{4} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BM} + \overline{MH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BM} + 5}$ ，$\cot C = \frac{1}{2} = \frac{\overline{MC} - \overline{MH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MC} - 5}{\overline{AH}}$

兩式相乘$\Rightarrow \quad \frac{3}{8} = \frac{\overline{MC} - 5}{\overline{BM} + 5} \quad \Rightarrow \quad \overline{BM} = \overline{MC} = 11$；$\overline{AH} = 12$，

$\overline{BC} = 22$，$\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH} = \frac{1}{2}\times 22\times 12 = 132$

又 $\sin B = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{\overline{AH}}{\sin A} = \overline{AH}\times\frac{5}{3} = 20$