高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：97.04.30					
範圍	2-2、3 三角函數基本關係、測量	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^2\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^2\theta}=$

(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2　(E) 1

【解答】(C)

【詳解】原式$=\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2\theta}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+1}$

$=\dfrac{1+\sin^2\theta}{\sin^2\theta+1}+\dfrac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1}+\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1+1+1=3$

2. $(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta-2$ 之值為(A) 2　(B) 1　(C) 0　(D) -1　(E) -2

【解答】(D)

【詳解】$(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta-2$

$=(1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta-2$

$=(1-\tan^2\theta)(\sec^2\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta-2$

$=(1-\tan^2\theta)\cdot 1+\tan^2\theta-2$

$=1-2=-1$

3. 下列各式何者成立？

(A) $\sin 20°=\cos 70°$　(B) $\cos 40°=\sin 60°$　(C) $\tan 25°=\cot 35°$　(D) $\sec 33°=\csc 67°$

(E) $\csc 50°=\sin 40°$

【解答】(A)

【詳解】

(B)$\cos 40°=\sin 50°$　(C)$\tan 25°=\cot 65°$　(D)$\sec 33°=\csc 57°$　(E)$\csc 50°=\sec 40°$

4. (複選)下列敘述，何者正確？

(A) $0°<\theta<45°$時，$\sin\theta>\cos\theta$　(B) $0°<\theta<45°$時，$\tan\theta>\cot\theta$　(C) $0°<\theta<45°$時，$\sec\theta>\csc\theta$　(D) $45°<\theta<90°$時，$\sec\theta>\csc\theta$　(E) $0°<\theta<90°$時，$\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta$

【解答】(D)(E)

【詳解】

$0°<\theta<45°$	$\theta=45°$	$45°<\theta<90°$
$\sin\theta<\cos\theta$	$\sin\theta=\cos\theta$	$\sin\theta>\cos\theta$
$\tan\theta<\cot\theta$	$\tan\theta=\cot\theta$	$\tan\theta>\cot\theta$
$\sec\theta<\csc\theta$	$\sec\theta=\csc\theta$	$\sec\theta>\csc\theta$

5. (複選)下列有關測量的敘述，何者正確？

(A)若自點 P 測點 Q 的仰角爲 32°，則自點 Q 測得點 P 之俯角爲 58°

(B)自地面上 P，Q 兩點測得目標物 R 的俯角各爲α，β，若$\alpha > \beta$，則$\overline{PR} > \overline{QR}$

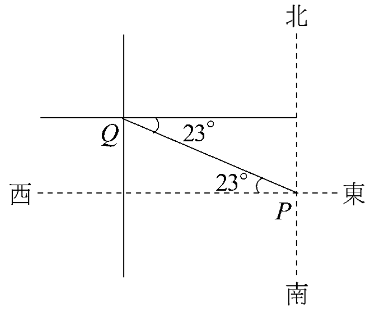
(C)設自地面上四點 P，Q，R，S 測得同一目標的仰角都相同，則 P，Q，R，S 四點共圓

(D)若點 P 在點 Q 的東 23°南，則點 P 在點 Q 的南 67°東

(E)若點 P 在點 Q 的東 23°南，則點 Q 在點 P 的西 23°北

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】



(A)自 Q 測得 P 之俯角 ＝ 自 P 測得 Q 之仰角 $= 32°$

(B)距離目標物愈近，所測得仰角愈大　∴　$\overline{PR} < \overline{QR}$

(C) P，Q，R，S 仰角相同，P，Q，R，S 到目標等距，四點共圓

(D)就方位而言，東 23°南 ＝ 南 67°東

(E)如圖，P 在 Q 的東 23°南　$\Leftrightarrow$　Q 在 P 的西 23°北

二、填充題(每題 10 分)

1. 設θ是一個銳角，$\sin\theta = k$，以k表出(1) $\tan\theta =$__________。　(2) $\sec\theta =$__________。

【解答】(1) $\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

2. 設θ爲銳角，$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{5}$，求$\sin\theta =$__________。

【解答】$\dfrac{4}{5}$

【詳解】

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{5}$　$\Rightarrow$　$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = (\dfrac{1}{5})^2$　$\Rightarrow$　$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{1}{25}$

$\Rightarrow$　$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{25}$　$\Rightarrow$　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{12}{25}$

又$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2\times\dfrac{12}{25} = \dfrac{49}{25}$

又θ爲一銳角，故$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{7}{5}$，$\begin{cases} \sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{5} \cdots\cdots ① \\ \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{7}{5} \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①+②得 $2\sin\theta = \dfrac{8}{5}$，故$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$

3. 設 $0° < x < 45°$且$\sin x + \cos x = \dfrac{4}{3}$，則

(1)$\sin x \cdot \cos x =$______________，(2)$\sin x - \cos x =$__________。

(3) $\sin^4\theta + \cos^4\theta =$____________。(3) $\tan^2\theta + \cot^2\theta =$__________。

【解答】(1) $\frac{7}{18}$，(2) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$，(3) $\frac{113}{162}$，(4) $\frac{226}{49}$

【詳解】

(1) $\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$ 平方之，$1+2\sin x\cos x=\frac{16}{9}$，$2\sin x\cos x=\frac{7}{9}$，即 $\sin x\cos x=\frac{7}{18}$

(2) $0°<x<45°$，故 $0<\sin x<\cos x$

$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$，所以 $\sin x-\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

(3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\cdot(\frac{7}{18})^2=\frac{113}{162}$

(4) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\frac{113}{162}}{\frac{49}{18^2}}=\frac{113}{162}\times\frac{18^2}{49}=\frac{226}{49}$

4. 設 $\angle A$ 為銳角，且 $0°<4\angle A<90°$，若 $\tan 4A=\cot 2A$，則 $\sin 2A+\cos 3A$ 之值為__________。

【解答】$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

因為 $0°<4\angle A<90°$，所以 $0°<90°-2\angle A<90°$

又 $\tan 4A=\cot 2A \Rightarrow 4\angle A+2\angle A=90° \quad \Rightarrow 6\angle A=90°$

$\therefore \angle A=15°$，$\sin 2A+\cos 3A=\sin 30°+\cos 45°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

5. $(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$ 之值為__________。

【解答】5

【詳解】

$(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+2+\csc^2\theta)+(\cos^2\theta+2+\sec^2\theta)-(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)=1+2+1+1=5$

6. $\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 89°$ 之和為__________。

【解答】$\frac{89}{2}$

【詳解】

原式 $=(\sin^2 1°+\sin^2 89°)+(\sin^2 2°+\sin^2 88°)+(\sin^2 3°+\sin^2 87°)+\cdots+(\sin^2 44°+\sin^2 46°)+\sin^2 45°$

$=(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+(\sin^2 3°+\cos^2 3°)+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\frac{1}{2}$

$=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{44\text{個}}+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$

7. 設$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，則(1)$\dfrac{3\cos\theta+4\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}$之值爲______。(2) $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-3\cos^2\theta$之值爲_____。

【解答】(1)$\dfrac{13}{5}$ (2)-2

【詳解】

(1)$\dfrac{3\cos\theta+4\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}=\dfrac{\dfrac{3\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{4\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{3+4\tan\theta}{1+2\tan\theta}=\dfrac{3+4\cdot\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}=\dfrac{13}{5}$

(2) $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-3\cos^2\theta=\cos^2\theta(\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+2\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-3)$

$=\dfrac{1}{\sec^2\theta}(\tan^2\theta+2\tan\theta-3)$

$=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}(\tan^2\theta+2\tan\theta-3)$

$=\dfrac{1}{1+(\frac{1}{3})^2}[(\frac{1}{3})^2+2(\frac{1}{3})-3]$

$=\dfrac{9}{10}[\dfrac{1+6-27}{9}]=-2$

8. 設 $0°<\theta<45°$，若方程式$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+2=0$ 有一根爲 $3-\sqrt{7}$，則另一根爲__________，$\sin\theta\cdot\cos\theta=$__________；而$\sin^3\theta-\cos^3\theta=$__________。

【解答】 $3+\sqrt{7}$，$\dfrac{1}{6}$，$-\dfrac{7\sqrt{6}}{18}$

【詳解】

(1)設α 爲二次方程式$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+2=0$ 的另一根

根與係數的關係知$\alpha\cdot(3-\sqrt{7})=2\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{2(3+\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\dfrac{2(3+\sqrt{7})}{9-7}=3+\sqrt{7}$

故 $3-\sqrt{7}$ 及 $3+\sqrt{7}$ 爲此二次方程式的二根

(2)二根的和爲$\tan\theta+\cot\theta=(3-\sqrt{7})+(3+\sqrt{7})=6$

$\therefore\ \tan\theta+\cot\theta=6\ \Leftrightarrow\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{6}$

(2) $0°<\theta<45°$，所以 $0<\sin\theta<\cos\theta$，

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$，$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}(1+\dfrac{1}{6})=-\dfrac{7\sqrt{6}}{18}$

9. 設$\sec\theta+\tan\theta=3$，則$\sec\theta$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{5}{3}$

【詳解】

由平方關係$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\therefore$ $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ $\Rightarrow$ $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=1$

又$\sec\theta+\tan\theta=3 \quad \Rightarrow \quad \sec\theta-\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，由$\begin{cases}\sec\theta+\tan\theta=3 \cdots\cdots ① \\ \sec\theta-\tan\theta=\dfrac{1}{3} \cdots\cdots ②\end{cases}$

①+②得 $2\sec\theta=\dfrac{10}{3} \quad \therefore \quad \sec\theta=\dfrac{5}{3}$

10.設$f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$，則 $4f(6)-6f(4)+5$ 之值為__________。

【解答】3

【詳解】

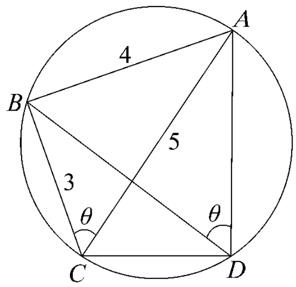
$\because \quad 4f(6)-6f(4)+5=4(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-6(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+5$

$=4[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)]-6[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta]+5$

$=4[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta]-6+12\sin^2\theta\cos^2\theta+5=4-6+5=3$

11. 已知$ABCD$為一圓內接四邊形，$\overline{AC}$為直徑，若$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=4$，$\angle ADB=\theta$，則$\sin\theta+\cos\theta$ =__________。

【解答】$\dfrac{7}{5}$



【詳解】

如圖所示：$ABCD$為一圓內接四邊形，$\overline{AC}$為直徑$\Rightarrow \angle ABC=90°$，

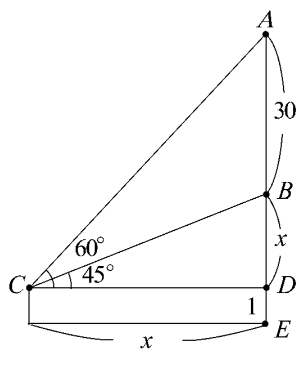
$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=4$，由畢氏定理可得$\overline{BC}=3$

又$\angle ACB=\angle ADB=\theta$ (同弧所對的圓周角相等)

$\triangle ABC$中， $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$

12.小山丘上架設一座高壓電線的鐵塔，塔高 30 公尺，在觀測點C測得塔頂的仰角為 60°，塔底的仰角為 45°，若C點至地面的高度為 1 公尺，且求得塔底離地面的高度為$a+b\sqrt{3}$公尺，（其中a，b為正整數），則數對$(a，b)=$__________。

【解答】(16，15)



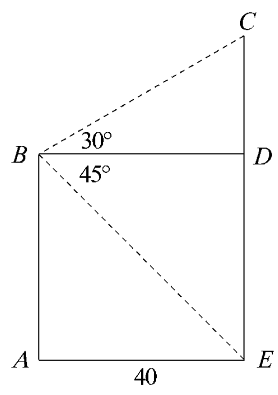
【詳解】

令$\overline{CD}=x$，則$\overline{BD}=x$，而$30+x=\sqrt{3}x \quad \therefore \quad x=\dfrac{30}{\sqrt{3}-1}=15(\sqrt{3}+1)$

所求=$\overline{BE}=x+1=16+15\sqrt{3} \quad \therefore \quad (a，b)=(16，15)$

13.從大馬路旁某大廈一窗口，測得馬路對面另一大廈屋頂的仰角為 30°，屋基的俯角為 45°，已知馬路寬為 40 公尺，求對面大廈的高度= _____ 公尺。

【解答】$\dfrac{40\sqrt{3}+120}{3}$



【詳解】

$\because \quad \angle DBE=45° \quad , \quad \overline{AE}=40=\overline{BD}=\overline{DE}$

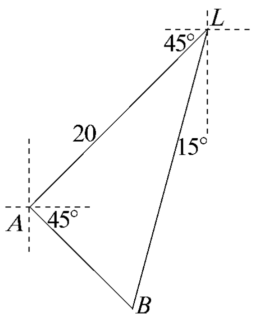
在△CBD 中，$\angle CBD = 30°$　$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{40}$

$\Rightarrow \quad \overline{CD} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \frac{40\sqrt{3}}{3} + 40 = \frac{40\sqrt{3}+120}{3}$

14.九三號軍艦在燈塔L之西南，八一四號軍艦在燈塔L之南 15°西，且在九三號軍艦之東南，已知九三號軍艦與燈塔L相距 20 公里，則兩軍艦的距離爲__________公里。

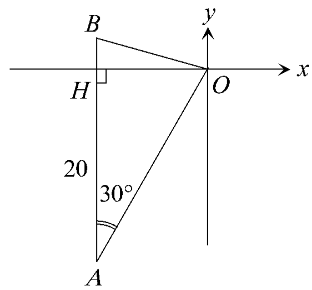
【解答】$\frac{20\sqrt{3}}{3}$公里

【詳解】



設 A 點表九三號軍艦，B 點表八一四號軍艦，L 點表燈塔，
在△LAB 中，$\angle LAB = 90°$，$\overline{LA} = 20$，而$\angle ALB$ =90° −(45°+15°)= 30°

於△LAB 中，$\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \overline{LA} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$公里



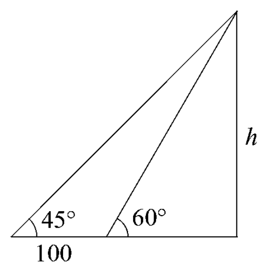
15.一島在船之北 30°東，此船往北行駛 20 公里後，發現島在南 60°東，則船與島之最近距離爲__________公里。

【解答】$5\sqrt{3}$

【詳解】

設島爲原點 O，如圖，$\angle ABO = 90°$，斜邊 $\overline{AB} = 20$

由 30° - 60° - 90° 定理知$\overline{OB} = 10$，$\overline{OA} = 10\sqrt{3}$，$\overline{OH} = \frac{1}{2}\overline{OA} = 5\sqrt{3}$



16.某人在A處測得高樓頂之仰角爲 45°，前進 100 公尺到B處，再測得仰角爲 60°，則樓高爲__________公尺。

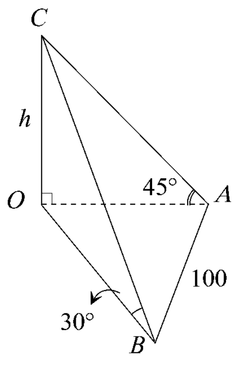
【解答】$50(3+\sqrt{3})$

【詳解】

設樓高爲 h，則由圖知$\frac{100+\frac{h}{\sqrt{3}}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \sqrt{3}h = 100 + \frac{h}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 100 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}-1)h = 100\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad h = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 50\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 50(3+\sqrt{3})$



17.自塔的正東A處測得塔頂的仰角爲 45°，自塔的正南B處再測得仰角爲 30°，若$\overline{AB} = 100$ 公尺，則塔高爲__________公尺。

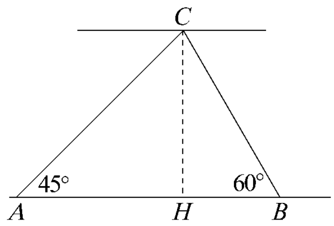
【解答】50

【詳解】

如圖，設塔高爲h，則$\overline{OA} = h$，$\overline{OB} = \sqrt{3}h$，$h^2 + 3h^2 = 100^2 \quad \Rightarrow \quad 4h^2 = 10000 \quad \Rightarrow \quad h = 50$

18.測量員欲測河流的寬度，在岸邊取兩點A、B，並在對岸取一目標C，若測得$\angle CAB = 45°$，$\angle CBA = 60°$且$\overline{AB} = 100$ 公尺，則河寬爲__________。

【解答】$50(3-\sqrt{3})$公尺



【詳解】

設河寬$\overline{CH}$爲x公尺，

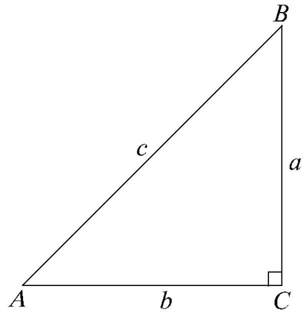
於△AHC中，$\overline{AH} = x$，△BHC中，$\overline{BH} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

得$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} \Leftrightarrow x + \dfrac{x}{\sqrt{3}} = 100 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}x = 100 \Leftrightarrow x = \dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 50(3-\sqrt{3})$

19. 在△ABC中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$及$\angle C$所對的邊長分別爲a，b及c，

若 $8\cos A + \cos B = 4$，則$\cos A =$__________，而$a：b：c =$__________。

【解答】$\dfrac{5}{13}$；$12：5：13$



【詳解】

在△ABC中，$\angle C = 90°$，由畢氏定理得$a^2 + b^2 = c^2$……①

$\because\ 8\cos A + \cos B = 4 \quad \therefore\ 8 \cdot \dfrac{b}{c} + \dfrac{a}{c} = 4 \Leftrightarrow a + 8b = 4c$……②

由②將$a = 4c - 8b$代入①，

得$(4c-8b)^2 + b^2 = c^2 \xleftrightarrow{\text{整理}} 65b^2 - 64bc + 15c^2 = 0$

$\Leftrightarrow 65(\dfrac{b}{c})^2 - 64(\dfrac{b}{c}) + 15 = 0$　同除以c^2，設$t = \dfrac{b}{c}$

$\Leftrightarrow 65t^2 - 64t + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (13t-5)(5t-3) = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{13}$

當$t = \dfrac{3}{5} \Rightarrow b = \dfrac{3}{5}c$代入②得$a = 4c - 8b = -\dfrac{4}{5}c < 0$（不合）

再$t = \dfrac{5}{13} \Rightarrow b = \dfrac{5}{13}c$代入②得$a = 4c - 8b = \dfrac{12}{13}c > 0$，得$\cos A = \dfrac{b}{c} = t = \dfrac{5}{13}$

故$a：b：c = \dfrac{12}{13}c：\dfrac{5}{13}c：c = 12：5：13$