

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.04.09				
範圍	1-5 對數查表 b	班級		姓名
		座號		

一、選擇題(每題 10 分)

1. 設 $a = 2^{26}$ ， $b = 3^{16}$ ，且已知 $\log_{10}a = 7.8260$ ， $\log_{10}b = 7.6336$ ，試問下列何者正確？
 (A) a 為 7 位數 (B) b 為 6 位數 (C) ab 為 15 位數 (D) ab 為 16 位數 (E) ab 為 49 位數

【解答】(D)

【詳解】

$$\log_{10}a = 7.8260, \log_{10}b = 7.6336 \Rightarrow a, b \text{ 首數 } 7, \text{ 故皆為 } 8 \text{ 位數}$$

$$\log_{10}ab = \log_{10}a + \log_{10}b = 7.8260 + 7.6336 = 15.4596 \Rightarrow ab \text{ 首數 } 15, \text{ 故 } 16 \text{ 位數}$$

2. 已知 $\log x$ 的尾數與 $\log 0.12345$ 相同， $\log x$ 的首數與 $\log 67890$ 的首數相同，則 $x =$
 (A) 67890.12345 (B) 67890 (C) 12345 (D) 12345.67890

【解答】(C)

【詳解】

$$\log 0.12345 = \log(1.2345 \times 10^{-1}) = -1 + \log 1.2345, \log 67890 = \log(6.789 \times 10^4) = 4 + \log 6.789$$

$$\therefore \log x = 4 + \log 1.2345 = \log 10^4 + \log 1.2345 = \log(10^4 \times 1.2345) = \log 12345, \therefore x = 12345$$

3. 設 $\log x = -5.6789$ ，下列何者正確？
 (A) $\log x$ 的首數為 -5 (B) $\log x$ 的尾數為 0.6789 (C) $\log x$ 的第一位有效數字為 4
 (D) x 的值在小數點後第五位始出現不為 0 的數字 (E) $\log x$ 的第一位有效數字為 2

【解答】(E)

【詳解】

$$\log x = -5.6789 = -5 + (-0.6789) = -6 + (1 - 0.6789) = -6 + 0.3211$$

$$\text{又 } \log 2 = 0.3010 < 0.3211 < 0.4771 = \log 3$$

$$x = 2 \cdots \times 10^{-6}, x \text{ 在小數點後第六位始出現不為 } 0 \text{ 的數字 } 2$$

4. (複選)已知 $\log 2.008 = 0.3027$ ，下列何者正確？
 (A) $\log 2008 = 3.3027$ (B) $\log 0.002008 = -3.3027$ (C) $\log x = 3.3027$ 時， $x = 2008$
 (D) $\log x = -2.3027$ 時， $x = 0.002008$ (E) $\log_{0.1} 2.008 = -0.3027$

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

$$(B) \log 0.002008 = -3 + \log 2.008 = -3 + 0.3027 = -2.6973$$

$$(D) \log x = -2.3027 = -3 + 0.6973 = \log 10^{-3} + \log 4.981 = \log(4.981 \times 10^{-3}) \Rightarrow x = 0.004981$$

$$(E) \log_{0.1} 2.008 = \log_{10^{-1}} 2.008 = -\log 2.008 = -0.3027$$

5. (複選)下列對數，選出首數相同者：

(A) $\log 1999$ (B) $\log 19990$ (C) $\log 3999$ (D) $\log 0.01999$ (E) $\log \frac{1}{1999}$

【解答】(A)(C)

【詳解】首數相同者即整數位數相同(A)(C)

6. (複選)下列對數，選出尾數相同者：

(A) $\log 327$ (B) $\log 723$ (C) $\log \frac{1}{327}$ (D) $\log 0.0327$ (E) $\log 327000$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

尾數相同者即有效數字相同(A)(D)(E)

(A) $\log 327 = \log (3.27 \times 10^2) = 2 + \log 3.27$

(B) $\log 723 = \log (7.23 \times 10^2) = 2 + \log 7.23$

(C) $\log \frac{1}{327} = -\log 327 = -\log (3.27 \times 10^2) = -2 - \log 3.27 = -3 + (1 - \log 3.27)$

(D) $\log 0.0327 = \log (3.27 \times 10^{-2}) = -2 + \log 3.27$

(E) $\log 327000 = \log (3.27 \times 10^5) = 5 + \log 3.27$

7. (複選)已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ，則下列敘述何者正確？

(A) $\log 5 = 0.6990$ (B) $\log 1.2 = 0.0079$ (C) $\log 0.018$ 的首數為 -1 (D) $\log 0.018$ 的尾數為 0.2552 (E) $\log 1800$ 的首數為 3

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(A) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0.6990$

(B) $\log 1.2 = \log \frac{3 \times 4}{10} = 0.4771 + 2 \times 0.3010 - 1 = 0.0791$

(C) $\log 0.018 = \log \frac{2 \times 3 \times 3}{1000} = 0.3010 + 0.4771 \times 2 - 3 = -1.7448 \quad \therefore$ 首數為 -2

(D) $\log 0.018 = -1.7448 = -2 + 0.2552 \quad \therefore$ 尾數為 0.2552

(E) $\log 1800 = \log (2 \times 3 \times 3 \times 100) = 3.2552 \quad \therefore$ 首數為 3

二、填充題(每題 10 分)

1. $a \in N$ ，若 $\log a$ 的首數為 2 ，則此種 a 共有_____個。

【解答】900

【詳解】

$\log a$ 的首數為 $2 \Rightarrow 2 \leq \log a < 3 \Rightarrow \log 100 \leq \log a < \log 1000 \Rightarrow 100 \leq a < 1000$

$\therefore a \in N \quad \therefore$ 此種 a 共 $1000 - 100 = 900$ 個

2. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ，則滿足不等式 $(1.25)^n > 10^6$ 的最小正整數 n 之值為_____。

【解答】62

【詳解】 $\log 1.25 = \log \left(\frac{10}{8}\right) = \log 10 - \log 8 = 1 - 3 \log 2 = 1 - 3 \times 0.3010 = 0.097$

$\log (1.25)^n > \log 10^6 \Rightarrow n \log 1.25 > 6 \Rightarrow n \times 0.097 > 6 \Rightarrow n > \frac{6}{0.097} = 61. \dots, \quad n = 62$ 為最小

3. 已知 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 7 = 0.8451$, 若 7^{70} 為 m 位數且最高位數字為 n , 則數對 $(m, n) =$ _____。

【解答】(51, 1)

【詳解】

$\log 7^{70} = 70 \log 7 = 70 \times 0.8451 = 59 + 0.157$, 首數 = 59, 7^{70} 為 $59+1=60$ 位數, $m = 60$
 $(\log 1 = 0) < (\text{尾數} = 0.157) < (0.3010 = \log 2) \therefore$ 最高位數字 $n = 1$

4. 若 n 為自然數且 $\log(\log n) = 3$, 則 n 的位數 = _____。

【解答】1001

【詳解】

$\log(\log n) = 3 \Rightarrow (\log n) = 1000 = \log 10^{1000} \Rightarrow n = 10^{1000} = \overbrace{1000 \cdots 0}^{1000 \text{個}}$, n 為 1001 位數

5. $25^{16} + 16^{25}$ 是 m 位正整數且首位數字為 k , 則序對 $(m, k) =$ _____。

【解答】(31, 1)

【詳解】

(1) $\log 25^{16} = \log \left(\frac{100}{4}\right)^{16} = 16(\log 100 - \log 4) = 16(2 - 2 \times 0.3010) = 22.368$

$\therefore 25^{16}$ 為 23 位數且 $0.3010 < 0.368 < 0.4771 \therefore 25^{16}$ 的首位數字為 2

(2) $\log 16^{25} = 25 \log 2^4 = 25 \times 4 \times 0.3010 = 30.1$

$\therefore 16^{25}$ 為 31 位數且 $0 < 0.1 < 0.3010 \therefore 16^{25}$ 的首位數字為 1

由(1)(2)知 $25^{16} + 16^{25}$ 為 31 位數且首位數字為 1 $\Rightarrow (m, k) = (31, 1)$

6. 設 $x = \frac{7^{100} \times 3^{20}}{2^{300}}$, 則:(1) x 的整數部分位數為_____。(2) x 的首位數字為_____。

【解答】(1) 4 (2) 5

【詳解】

$$\log x = \log \frac{7^{100} \times 3^{20}}{2^{300}}$$

$$= 100 \log 7 + 20 \log 3 - 300 \log 2 = 100 \times 0.8451 + 20 \times 0.4771 - 300 \times 0.3010 = 3.752$$

(1) $\log x$ 的首數 = 3 $\Rightarrow x$ 的整數部分的位數 = 4

(2) $\log x$ 的尾數 = 0.752 $\therefore \log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0.699$, $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.7781$

$\Rightarrow 0.699 < \log x$ 的尾數 $< 0.7781 \Rightarrow x$ 的首位數字為 5

7. 已知 $\log 0.0003561 = -3.4486$, 則(1) $\log 3561 =$ _____。(2) $\log 0.3561 =$ _____。

【解答】(1) 3.5514 (2) -0.4486

【詳解】

$\log 0.0003561 = \log (3.561 + 10^{-4}) = -4 + \log 3.561 = -3.4486 \therefore \log 3.561 = 0.5514$

(1) $\log 3561 = \log (3.561 \times 10^3) = 3 + \log 3.561 = 3.5514$

(2) $\log 0.3561 = \log (3.561 \times 10^{-1}) = -1 + \log 3.561 = -0.4486$

8. 已知 $\log 3 = 0.4771$, 3^{-40} 化為小數, 其小數點後第 n 位開始不為 0, 且此不為 0 的數字為 k , 則(1) $n =$ _____。 (2) $k =$ _____。

【解答】(1) 20 (2) 8

【詳解】

$$\log 3^{-40} = -40 \log 3 = -40 \times 0.4771 = -19.084 = -20 + 0.916$$

(1) 首數為 -20 , 所以小數點後第 20 位數字才不為 0

(2) 尾數為 0.916

$$\log 8 = 3 \log 2 = 0.9030, \log 9 = 2 \log 3 = 0.9542 \Rightarrow \log 8 < 0.916 < \log 9, \text{不為 0 的數字 } k = 8$$

9. 已知 $\log 4.37 = 0.6405$, $\log 4.38 = 0.6415$, 則

(1) 若 $\log x = 2.6412$, 則 $x =$ _____。 (2) 若 $\log y = -2.3590$, 則 $y =$ _____。

【解答】(1) 437.7 (2) 0.004375

【詳解】

$$(1) \log x = 2.6412 \Rightarrow \log x = 2 + 0.6412 \Rightarrow \log x - 2 = 0.6412 \Rightarrow \log \frac{x}{100} = 0.6412;$$

$$\text{以內插法: } \frac{x}{100} = 4.37 + \frac{0.0007}{0.001} \times 0.01 = 4.377, \therefore x = 437.7$$

x	$\log x$
4.37	0.6405
$\frac{x}{100}$	0.6412
4.38	0.6415

0.01 0.0007 0.001

$$(2) \log y = -2.3590 = -3 + 0.641 \Rightarrow \log y + 3 = 0.641 \Rightarrow \log 10^3 y = 0.641$$

$$\text{以內插法: } 10^3 y = 4.37 + \frac{0.0005}{0.001} \times 0.01 = 4.375 \therefore y = 0.004375$$

x	$\log x$
4.37	0.6405
$10^3 y$	0.641
4.38	0.6415

0.01 0.0005 0.001

10. 假設定期存款的年利率為 6%, 每四個月為一期, 複利計息, 李先生存進 10,000 元, 言明定期五年, 求期滿後的本利和 _____ 元。(利用下表)

x											表 尾 差								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1664	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27

【解答】13460 元

【詳解】 年利率為 6%, 每四個月為一期, 則每期利率為 2%, 5 年共 15 期

$$\text{五年後本利和 } S = 10000(1 + 0.02)^{15} = 10^4(1.02)^{15},$$

$$\text{設 } x = (1.02)^{15}, \text{ 取 } \log \Rightarrow \log x = \log(1.02)^{15} = 15 \log 1.02 = 15 \times 0.0086 = 0.129$$

$$\text{由查表可知 } \log 1.346 = 0.1271 + 0.0019 = 0.129 \Rightarrow x = 1.346$$

$$\therefore S = 10000 \times 1.346 = 13460 \text{ (元)}$$

11.阿牛將 10 萬元存入銀行，以年利率 6%，每年複利計息一次，則至少需要_____年，方使利息部分超過 15 萬元。（利用上表）

【解答】16

【詳解】

$$n \text{ 年後本利和} = 100000(1 + 0.06)^n > 100000 + 150000 \Rightarrow (1.06)^n > \frac{25}{10}$$

$$\Rightarrow \log(1.06)^n > \log 25 - \log 10 \Rightarrow n \times (0.0253) > \log 100 - \log 4 - 1 = 0.398$$

$$\Rightarrow n > \frac{0.398}{0.0253} \doteq 15.7, \therefore n \geq 16$$

12.某人於十年期間，每年年初須付保險費 10000 元，若依年利率 4%，並以每一年一期複利計算，則十年後此項保費總額為_____元。（利用上表）

【解答】124800

【詳解】

$$\text{十年後的本利和} = 10000(1.04)^{10} + 10000(1.04)^9 + 10000(1.04)^8 + \cdots + 10000(1.04)^1$$

$$= 10000 \times \frac{1.04[(1.04)^{10} - 1]}{1.04 - 1} = 260000[(1.04)^{10} - 1]$$

$$\text{令 } x = (1.04)^{10} \Rightarrow \log x = 10 \log 1.04 = 0.17 \Rightarrow x = 1.48$$

$$\therefore \text{本利和} = 260000(1.48 - 1) = 124800$$

13.等比級數 $S_{100} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{99}$,

(1) S_{100} 為幾位數? _____

(2) S_{100} 之首位數字（最左邊的一位數字）為何? _____

(3) S_{100} 之個位之數字為何? _____

【解答】(1) 31 (2) 1 (3) 5

【詳解】

$$S_{100} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{99} = \frac{1 \cdot (2^{100} - 1)}{2 - 1} = 2^{100} - 1$$

2^n 之個位數字依 2, 4, 8, 6 四次一循環，故 $2^{100} - 1$ 之個位數字為 $6 - 1 = 5$

$2^{100} - 1$ 與 2^{100} 之位數相同， $\log 2^{100} = 100 \log 2 = 30.1 = 30 + 0.1$ ，首數為 30，故為 31 位數
又 $\log 1 = 0 < \text{尾數} = 0.1 < 0.3010 = \log 2 \therefore$ 最高位數字為 1

14.濃度 8% 的食鹽水 100 克，今從中取出 20 克再加入 20 克的純水混合，再從其中取出 20 克後，再加入 20 克的純水混合，如此繼續操作 n 次，欲使食鹽水的濃度低於 2%，求 n 的最小值_____。

【解答】7

【詳解】 $1 - \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$

設經過 n 次操作後，食鹽水的濃度為 $a_n\%$ ，則 $a_0 = 100 \times \frac{8}{100}$ ， $a_1 = 100 \times \frac{8}{100} \times \frac{4}{5}$

$$a_2 = 100 \times \frac{8}{100} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2, \cdots, a_n = 100 \times \frac{8}{100} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{欲使 } a_n < 2 &\Rightarrow 100 \times \frac{8}{100} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n < 2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{4}, \text{ 兩邊取對數, 得 } n \log \frac{4}{5} < \log \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow n(\log 4 - \log 5) < -\log 4 \Rightarrow n[2 \times 0.3010 - (1 - 0.3010)] < -2 \times 0.3010 \\ &\Rightarrow n(-0.0970) < -0.6020 \Rightarrow n > \frac{0.602}{0.097} \doteq 6.2 \therefore n \text{ 的最小值} = 7 \end{aligned}$$

15. 設有一張很大很大的白報紙，厚 $\frac{1}{100}$ 公分，對摺一次，厚度加倍，再對摺一次厚度又加倍，如此繼續下去，則至少要對摺幾次，其厚度才達地球到太陽的距離？_____次
(地球到太陽的距離約為 14549 萬公里，且 $\log 1.4549 \doteq 0.1628$)

【解答】51

【詳解】

(1) 對摺一次後厚度為 $\frac{1}{100} \times 2$ 公分，對摺二次後厚度為 $\frac{1}{100} \times 2^2$ 公分...

對摺 n 次後厚度為 $\frac{1}{100} \times 2^n$ 公分

(2) 當 $\frac{1}{100} \times 2^n \geq 14549 \times 10^9$ (公分)， $2^n \geq 1.4549 \times 10^{15}$ ， $n \log 2 \geq \log 1.4549 + 15 = 15.1628$

$\therefore n \geq \frac{15.1628}{0.3010} = 50.3 \dots \therefore n \geq 51$ ，即最少要對摺 51 次

16. 利用下列對數表，求 $y = \frac{(6.38)^3 \cdot (8.43)^2}{\sqrt[3]{(0.635)^5}}$ 之近似值_____ (小數點後四捨五入)。

x	3.92	3.93	3.94	6.35	6.38	8.43
$\log x$	0.5933	0.5944	0.5955	0.8028	0.8048	0.9258

【解答】39327

【詳解】

(1) $\log y = 3 \log 6.38 + 2 \log 8.43 - \frac{5}{3} \log 0.635 = 3 \times 0.8048 + 2 \times 0.9258 - \frac{5}{3}(0.8028 - 1)$
 $= 4.5947 = 4 + 0.5947$

(2)

x	$\log x$
3.93	0.5944
x	0.5947
3.94	0.5955

$\therefore \frac{3.94 - 3.93}{x - 3.93} = \frac{0.5955 - 0.5944}{0.5947 - 0.5944} \therefore x \doteq 3.9327$

(3) $\therefore \log y \doteq \log 10^4 + \log 3.9327 = \log 39327 \therefore y \doteq 39327$