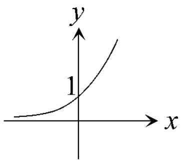
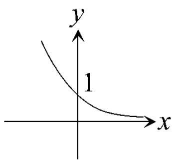
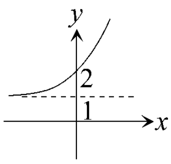
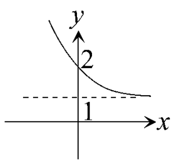
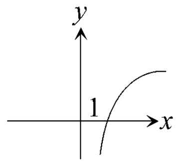
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.03.19					
範圍	1-2、4 指數、對數圖形、不等式	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 下列何者為$y = 1 + (\frac{3}{5})^x$的部分圖形？

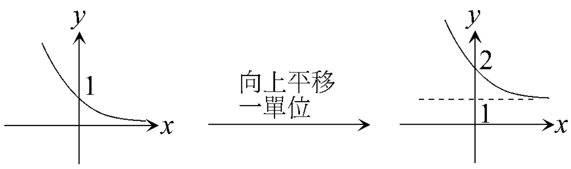
(A) 
(B) 
C) 
D) 
(E) 

【解答】(D)

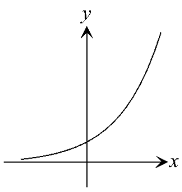
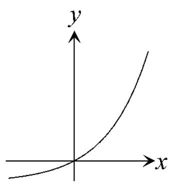
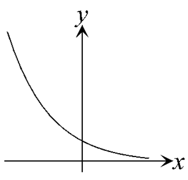
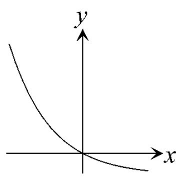
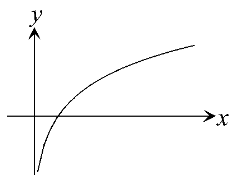
【詳解】

$y = 1 + (\frac{3}{5})^x \Rightarrow \quad y - 1 = (\frac{3}{5})^x$ 即先作出$y = (\frac{3}{5})^x$的圖形，再將此圖形向上平移一單位

$y = 1 + (\frac{3}{5})^x$的圖形：



2. (複選)若$a > 0$，$a \neq 1$，則下列各圖形中，何者可能是指數函數$y = a^x$的部分圖形？

(A) 
(B) 
(C) 
D) 
E) 

【解答】(A)(C)

【詳解】

$x \in R \quad \Rightarrow \quad a^x > 0 \quad \therefore \quad y = a^x$圖形在$x$軸上方

3. (複選)設$y = 2^x$的圖形為F，$y = 0.5^x$的圖形為G，下列何者正確？

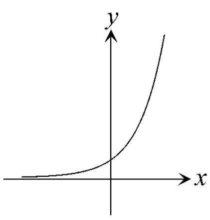
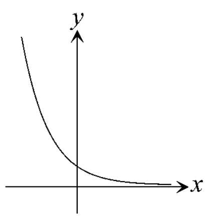
(A) F為由左往右逐漸升高　(B) G為由左往右逐漸升高　(C) F與G均以x軸為漸近線

(D) G與$y = 2^{-x}$之圖形一致　(E) G與$y = \pi$ 恰交於一點

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

$F：y = 2^x$　　　　$G：y = 0.5^x = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$

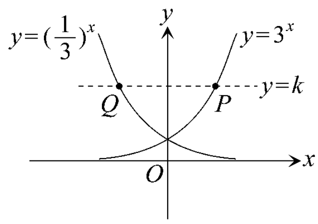
4. (複選)直線$y=k$與$y=3^x$圖形交於P點，與$y=(\frac{1}{3})^x$圖形交於Q點，則

(A) P與Q對稱於x軸　(B) P與Q對稱於y軸　(C) P在Q之右方

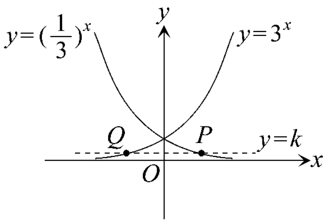
(D) P在Q之左方　(E)以上皆非

【解答】(B)

【詳解】



或



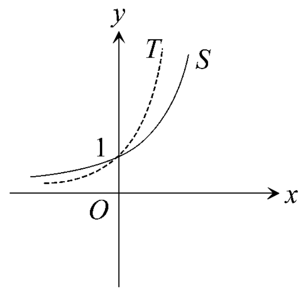
5. 設$y=2^x$的圖形為S，$y=3^x$的圖形為T，則

(A) S，T兩圖形恰交於一點　(B) S恆在T的下方　(C) S，T的漸近線相同

(D) S，T均為凹口向上　(E) S，T與任一條水平線均相交

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】



右圖中，實線為 S，虛線為 T，二者恰交於一點(0，1)，在 y 軸右方，T 在 S 之上方；在 y 軸左方，T 在 S 之下方，二者圖形均為凹口向上，且均以 x 軸（即 $y=0$）為漸近線，在 x 軸或其下方不與水平線相交

6. 下列哪一個函數的圖形與$x+y=0$ 恰有一交點？

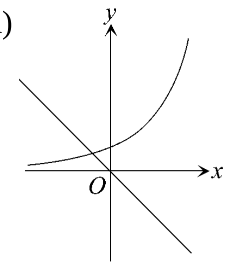
(A) $y=2^x$　(B) $y=-2^x$　(C) $y=2^{-|x|}$　(D) $y=2^{|x|}$　(E) $y=2^{x-2}$

【解答】(A)(C)(E)

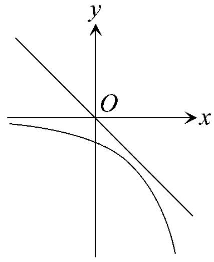
【詳解】

作函數圖形，再判斷其相交情況

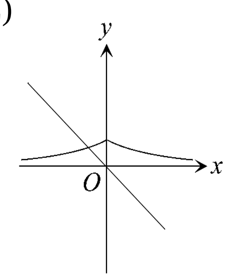
(A)



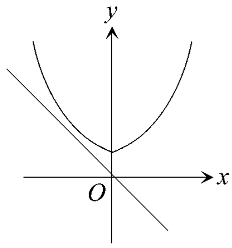
(B)



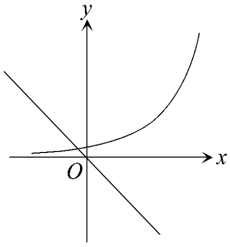
(C)



(D)



(E)



7. 下列敘述何者正確？

(A) $y=2^x$與$y=(\frac{1}{2})^x$的圖形對稱於y軸　(B) $y=2^x$與$y=-2^x$的圖形對稱於x軸　(C) $y=2^x$

與$y=-(\frac{1}{2})^x$的圖形對稱於原點　(D) $\forall a\in R$，$a>0$，$a\neq 1$，則$y=a^x$的圖形都是凹口向上

(E) $\forall a\in R$，$a>0$，$a\neq 1$，則$y=a^x$的圖形恆過一個定點

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A)點$(m，n)$在$y=2^x$上　$\Leftrightarrow$　$n=2^m$　$\Leftrightarrow$　點$(-m，n)$在$y=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$上

$\therefore$　兩圖形對稱於y軸

(B)點$(m，n)$在$y=2^x$上　$\Leftrightarrow$　$n=2^m$　$\Leftrightarrow$　點$(m，-n)$在$y=-2^x$上

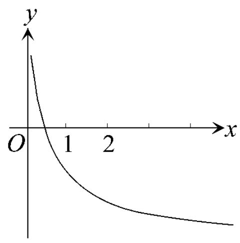
$\therefore$　兩圖形對稱於x軸

(C)點$(m，n)$在$y=2^x$上　$\Leftrightarrow$　$n=2^m$　$\Leftrightarrow$　點$(-m，-n)$在$y=-(\frac{1}{2})^x$上

$\therefore$　兩圖形對稱於原點

(D)指數函數圖形都是凹口向上

(E)指數函數圖形恆過定點(0，1)



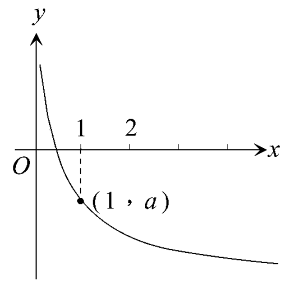
8. 下圖為函數$y=a+\log_b x$之部分圖形，其中a，b為常數，則下列何者為真？

(A) $a<0$，$b<1$　(B) $a>0$，$b>1$　(C) $a=0$，$b>1$

(D) $a>0$，$0<b<1$　(E) $a<0$，$0<b<1$

【解答】(E)

【詳解】



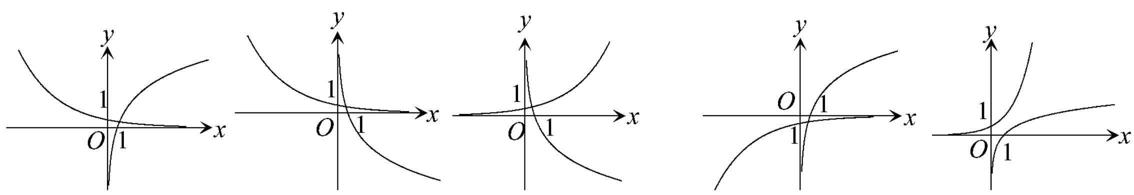
圖形由左而右下降　$\therefore$　$0<b<1$

$x=1$ 時，$y=a+\log_{10}1=a$，$(1，a)$ 在x軸下方　$\therefore$　$a<0$

9. 設$a>1$，則下列哪一個選項，表示函數$y=\log_a x$與$y=a^{-x}$的圖形？

(A)　(B)　(C)　(D)

(E)

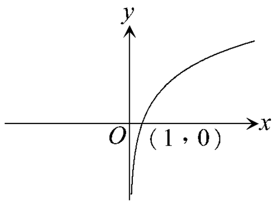


【解答】(A)

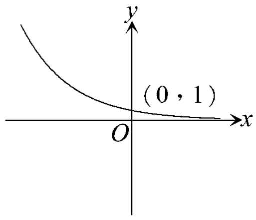
【詳解】

(1) $a>1$ 時，$y=\log_a x$圖形如圖(一)

(2) $a>1$ 時，$y=a^{-x}=(\frac{1}{a})^x$圖形如圖(二)



圖(一)



圖(二)

10. 求下列敘述何者正確？

(A) $y=3^x$與$y=3^{-x}$的圖形對稱於y軸　(B) $y=\log_3 x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$的圖形對稱於x軸

(C) $y=3^x$與$y=\log_3 x$的圖形對稱於y軸　(D) $y=3^{-x}$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$的圖形對稱於$x-y=0$

(E) $y=3^x$與$y=\log_3 x$的圖形相交於一點

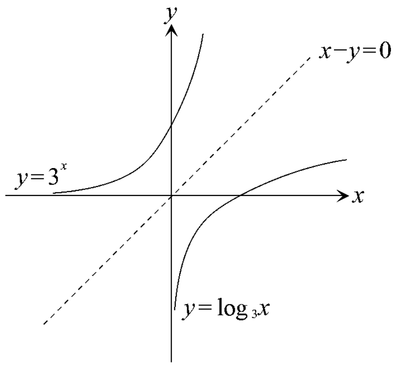
【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

(A)將$(x，y)$用$(-x，y)$代入$y=3^x$，得$y=3^{-x}$　∴　$y=3^x$與$y=3^{-x}$兩圖形對稱y軸

(B)將$(x，y)$用$(x，-y)$代入$y=\log_3 x$，得$-y=\log_3 x$　⇒　$y=\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}} x$

∴　$y=\log_3 x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$兩圖形對稱x軸



(C) $y=3^x$與$y=\log_3 x$互爲反函數

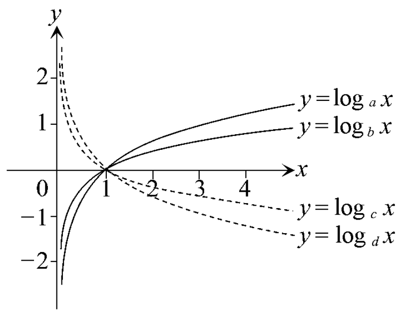
⇒　兩圖形對稱$x-y=0$，但不對稱y軸

(D) $y=3^{-x}=(\frac{1}{3})^x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$互爲反函數

⇒　兩圖形對稱於$x-y=0$

(E)由右圖可知$y=3x$與$y=\log_3 x$不相交

11.下圖中，$y=\log_a x$與$y=\log_d x$兩圖形對稱於x軸，$y=\log_b x$與$y=\log_c x$兩圖形對稱於x軸，則下列何者爲真？



(A) $a>b>c>d$　(B) $b>a>c>d$　(C) $b>a>d>c$

(D) $ad=1$　(E) $abcd=1$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】

∵由圖形知 $y=\log_a x$與$y=\log_b x$兩圖形均爲增函數

⇒　$a>1$，$b>1$ 且$b>a$⋯⋯①

又 $y=\log_c x$與$y=\log_d x$兩圖形均爲減函數

⇒　$1>d>c>0$⋯⋯②

由①②知，$b>a>d>c$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$a=(0.7)^{\sqrt{2}}$，$b=(0.7)^{\sqrt{3}}$，$c=(0.7)^{-\sqrt{2}}$，$d=(0.7)^{-\sqrt{3}}$，則a，b，c，d之大小順序爲________。

【解答】$d>c>a>b$

【詳解】

$\sqrt{3}>\sqrt{2}>-\sqrt{2}>-\sqrt{3}$，且 $0<0.7<1$

$\therefore\ (0.7)^{-\sqrt{3}}>(0.7)^{-\sqrt{2}}>(0.7)^{\sqrt{2}}>(0.7)^{\sqrt{3}}$，故 $d>c>a>b$

2. 設$a=8\sqrt{2}$、$b=4\sqrt[3]{4}$、$c=\sqrt[3]{256\sqrt{2}}$、$d=4^{\sqrt{3}}$、$e=2^{\pi}$，則a、b、c、d、e之大小順序為___。

【解答】$a>d>e>c>b$

【詳解】

$a=2^{\frac{7}{2}}$，$b=2^{\frac{8}{3}}$，$c=2^{\frac{17}{6}}$，$d=2^{2\sqrt{3}}$，$e=2^{\pi}$

$\because\ \frac{7}{2}>2\sqrt{3}>\pi>\frac{17}{6}>\frac{8}{3}$且$f(x)=2^x$為遞增函數　$\therefore\ a>d>e>c>b$

3. 不等式$(0.4)^{x^2-5x+2}>(6.25)^2$之解為________________。

【解答】$2<x<3$

【詳解】

$(0.4)^{x^2-5x+2}>(6.25)^2\ \Rightarrow(\frac{2}{5})^{x^2-5x+2}>(\frac{5}{2})^4=(\frac{2}{5})^{-4}\ \Rightarrow x^2-5x+2<-4$（$\because 0<$ 底數$=\frac{2}{5}<1$）

$x^2-5x+6<0\ \Rightarrow\ (x-2)(x-3)<0\ \Rightarrow\ 2<x<3$

4. 設$f(x)=9^x-2\cdot 3^{x+1}+1$，$-1\le x\le\frac{1}{2}$，則$f(x)$之最大值=____________。

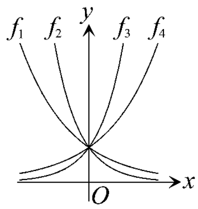
【解答】$-\frac{8}{9}$

【詳解】

$f(x)=9^x-2\cdot 3^{x+1}+1=3^{2x}-6\cdot 3^x+1=(3^x-3)^2-8$

$\because\ -1\le x\le\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\le 3^x\le\sqrt{3}$，$\therefore$ 當 $3^x=\frac{1}{3}$，即$x=-1$ 時，$f(x)$有最大值$=-\frac{8}{9}$

5. 指數函數$f_1(x)=a^x$，$f_2(x)=b^x$，$f_3(x)=c^x$，$f_4(x)=d^x$的圖形如圖，請由大而小寫出a，b，c，d的大小順序：______________________。



【解答】$c>d>a>b$

【詳解】

$\because\ f_1$，f_2的圖形是遞減 $0<a<1$，$0<b<1$，$\Rightarrow\ 1>a>b$

又f_3，f_4的圖形是遞增　$c>d>1$

故$c>d>1>a>b$

6. 不等式 $2\cdot 6^x-3^x-18\cdot 2^x+9<0$ 之解為______________。

【解答】$-1<x<2$

【詳解】

$2\cdot 6^x-3^x-18\cdot 2^x+9<0\ \Rightarrow\ (3^x-9)(2\cdot 2^x-1)<0$

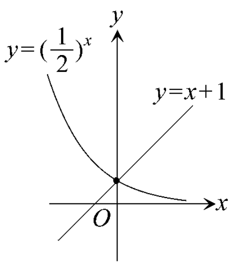
$\Rightarrow\ (3^x-3^2)(2^{x+1}-2^0)<0\ \Rightarrow\ (x-2)(x+1)<0\ \Rightarrow\ -1<x<2$

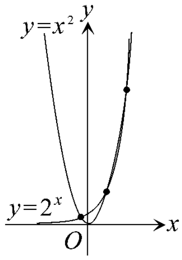
7. 方程式的實根個數：

(1)方程式$(\frac{1}{2})^x=x+1$ 的實根共有________個。(2)方程式$x^2=2^x$的實根共有__________個。

【解答】(1) 1　(2) 3

【詳解】





8. 求不等式$\log_{\frac{1}{4}}(4-x)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$之解爲__________。

【解答】$1<x<3$

【詳解】

$\log_{\frac{1}{4}}(4-x)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}(x-1)^2$

真數爲正且底數小於 1$\Rightarrow \begin{cases}4-x>0\\ x-1>0\\ 4-x>\frac{1}{4}(x-1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1<x<4 & \cdots\cdots①\\ (x-1)^2<16-4x & \cdots\cdots②\end{cases}$

由②得$x^2+2x-15<0 \Rightarrow (x+5)(x-3)<0 \Rightarrow -5<x<3$……③

由①③得 $1<x<3$

9. 不等式$\log_2(x-1)>\log_4(x^2-x-1)$之解爲__________。

【解答】$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$

【詳解】

$\log_4(x-1)^2>\log_4(x^2-x-1) \Rightarrow (x-1)^2>x^2-x-1 \Rightarrow x<2$…….①

又真數爲正 $\Rightarrow \begin{cases}x-1>0\\ x^2-x-1>0\end{cases} \Rightarrow x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$……..②

由①② $\therefore \frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$

10.已知對所有實數x，$\log_2(x^2+x+a)$之值恆爲正，求實數a的範圍爲__________。

【解答】$a>\frac{5}{4}$

【詳解】

$\log_2(x^2+x+a)$之值恆爲正 $\Rightarrow x^2+x+a>1 \Rightarrow x^2+x+(a-1)>0$

$\Rightarrow 1^2-4(a-1)<0 \Rightarrow a>\frac{5}{4}$

11.若$\log_{x-1}(2x-x^2+3)$有意義，則x之範圍爲__________。

【解答】$1<x<3$ 但 $x\neq 2$

【詳解】

$0<x-1\neq 1 \Rightarrow 1<x\neq 2$…….①

$2x-x^2+3>0 \Rightarrow x^2-2x-3<0 \Rightarrow -1<x<3$……..②

由①②得 $1<x<3$ 但$x\neq 2$

12.設x，y爲正數且$x+4y=8$，若$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y$之最小值爲$m$，又此時$x=x_0$，$y=y_0$，則

(1) $m=$ ＿＿＿＿＿＿。　(2) $(x_0，y_0)=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) -2　(2)$(4，1)$

【詳解】

$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y=\log_{\frac{1}{2}}xy$　，∵　$x，y>0$ 且$x+4y=8$

算幾不等式　$\Rightarrow$　$\dfrac{x+4y}{2}\geq\sqrt{x\cdot 4y}$　$\Rightarrow$　$4\geq\sqrt{4xy}\Rightarrow 16\geq 4xy$

$\Rightarrow$　$xy\leq 4$　$\Rightarrow$　$\log_{\frac{1}{2}}xy\geq\log_{\frac{1}{2}}4=-2$，　∴　$\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y$之最小值$m=-2$

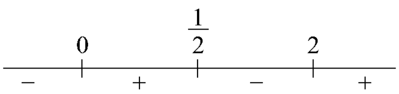
且等號成立時，$x=4y=4$　$\Rightarrow$　$x=4，y=1$　∴　$(x_0，y_0)=(4，1)$

13.設$\log_2 x+\log_x 2<\dfrac{5}{2}$，則$x$的範圍是＿＿＿＿＿＿。

【解答】$0<x<1$ 或$\sqrt{2}<x<4$

【詳解】

$\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{5}{2}<0$，設$t=\log_2 x\Rightarrow\dfrac{2t^2-5t+2}{2t}<0\ \Rightarrow 2t(2t-1)(t-2)<0\Rightarrow t<0,\dfrac{1}{2}<t<2$



∴　$\log_2 x<0$ 或$\dfrac{1}{2}<\log_2 x<2$，即 $0<x<1$ 或$\sqrt{2}<x<4$

14.解不等式$(\dfrac{1}{4})^{\log_{0.3}(\log_3\frac{x-2}{x-4})}\geq 1$。

【解答】$4<x\leq 5$

【詳解】

真數$\dfrac{x-2}{x-4}>0$　$\Rightarrow$　$(x-2)(x-4)>0$　$\Rightarrow$　$x>4$ 或$x<2$……①

真數$\log_3\dfrac{x-2}{x-4}>0$　$\Rightarrow$　$\dfrac{x-2}{x-4}>1$　$\Rightarrow$　$\dfrac{2}{x-4}>0$　$\Rightarrow$　$x>4$……②

原不等式即$(\dfrac{1}{4})^{\log_{0.3}(\log_3\frac{x-2}{x-4})}\geq(\dfrac{1}{4})^0$　$\Rightarrow$　$\log_{0.3}(\log_3\dfrac{x-2}{x-4})\leq 0=\log_{0.3}1$　$\Rightarrow\log_3(\dfrac{x-2}{x-4})\geq 1$

$\Rightarrow$　$\dfrac{x-2}{x-4}\geq 3$　$\Rightarrow$　$x-2\geq 3(x-4)$　∵　$x-4>0$　$\Rightarrow$　$x\leq 5$….. ③

由①②③，得$4<x\leq 5$

15.若方程式 $(\log ax)(\log ax^2)=4$ 的解皆大於 1，求a的範圍。

【解答】$0<a<\dfrac{1}{100}$

【詳解】

$(\log a+\log x)(\log a+\log x^2)=4$　$\Rightarrow$　$2(\log x)^2+3(\log a)(\log x)+[(\log a)^2-4]=0$

令$t=\log x$　$\Rightarrow$　$2t^2+3(\log a)t+[(\log a)^2-4]=0$

∵　$x>1$　$\Rightarrow$　$t>0$，即t的方程式有兩正根

$$\therefore \begin{cases} D = 9(\log a)^2 - 8[(\log a)^2 - 4] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (\log a)^2 + 32 \geq 0 \\ \text{兩根和} \ = -\dfrac{3}{2}\log a > 0 \quad \Rightarrow \quad \log a < 0 \\ \text{兩根積} \ = \dfrac{1}{2}[(\log a)^2 - 4] > 0 \quad \Rightarrow \quad \log a > 2 \text{ 或} \log a < -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 由以上得知 $\log a < -2 \quad \Rightarrow \quad \log a < \log 10^{-2}$，$\therefore \quad 0 < a < \dfrac{1}{100}$

16.若實數x滿足不等式$\log_3(3^x + 8) < \dfrac{x}{2} + 1 + \log_3 2$，試求$x$的範圍。

【解答】$\log_3 4 < x < \log_3 16$

【詳解】

$\log_3(3^x + 8) < \dfrac{x}{2} + 1 + \log_3 2 \quad \Rightarrow \quad \log_3(3^x + 8) < \log_3 3^{\frac{x}{2}} + \log_3 3 + \log_3 2 = \log_3(6 \cdot 3^{\frac{x}{2}})$

$\Rightarrow \quad 3^x + 8 < 6 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$，設$t = 3^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \quad (t)^2 - 6 \cdot t + 8 < 0$

$\Rightarrow \quad (t - 2)(t - 4) < 0$

$\Rightarrow \quad 2 < 3^{\frac{x}{2}} < 4$ 取LOG$\Rightarrow \quad \log_3 2 < \dfrac{x}{2} < \log_3 4 \quad \Rightarrow \quad 2\log_3 2 < x < 2\log_3 4 \Rightarrow \quad \log_3 4 < x < \log_3 16$