

範圍	1-1,2 指、對數	班級		姓名	
		座號		姓名	

一、填充題(每題 10 分)

1. $a > 0, a \neq 1$, 且 $\sqrt[4]{\sqrt{a}\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}} = a^x$, 則 x 之值為_____。

【解答】 $\frac{1}{6}$

【詳解】

$$\sqrt[4]{\sqrt{a}\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}} = [a^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{a}{a^{\frac{2}{3}}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}} = [a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{24}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$\because a \neq 0, 1, -1 \quad \therefore x = \frac{1}{6}$$

2. 設 $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$, 則 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 之值為_____。

【解答】 $2\sqrt{2} - 1$

【詳解】 乘法公式 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned} \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{(a^x + a^{-x})(a^{2x} - a^x \cdot a^{-x} + a^{-2x})}{a^x + a^{-x}} = a^{2x} + a^{-2x} - 1 \\ &= \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 1 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 - 1 = 2\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

3. 若 $a^{2x} = 7$, 則 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}}$ =_____。

【解答】 $\frac{57}{7}$

【詳解】 分子分母同乘以 a^x

$$\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} - 1} = \frac{(a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1}}{a^{2x} - 1} = \frac{7^2 - 7^{-1}}{7 - 1} = \frac{49 - \frac{1}{7}}{6} = \frac{57}{7}$$

4. 化簡 $(\frac{81}{16})^{-0.25} \cdot (\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}} \cdot (0.25)^{-0.5}$ 之值為_____。

【解答】 3

【詳解】

$$\text{原式} = (\frac{3}{2})^{4 \times (-\frac{1}{4})} \cdot (\frac{2}{3})^{3 \times (-\frac{2}{3})} \cdot (\frac{1}{2})^{2 \times (-\frac{1}{2})} = (\frac{3}{2})^{-1} \cdot (\frac{2}{3})^{-2} \cdot (\frac{1}{2})^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{1} = 3$$

5. 若 $53^x = 9, 477^y = 243$, 則 $\frac{2}{x} - \frac{5}{y}$ =_____。

【解答】 -2

【詳解】

$$\begin{cases} 53^x = 3^2 \\ 477^y = 3^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 53 = 3^{\frac{2}{x}} \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 477 = 3^{\frac{5}{y}} \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}, \textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{ 得 } 3^{\frac{2}{x} - \frac{5}{y}} = \frac{53}{477} = \frac{1}{9} = 3^{-2}, \quad \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = -2$$

7. 設 $\sqrt[x]{32} = \sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x} = 81^{xy}$, 則 $(x, y) =$ _____。

【解答】(5, 3)

【詳解】

$$\begin{cases} \sqrt[x]{32} = \sqrt[y]{2^{3y-6}} \\ 3^{15y+3x} = 81^{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{5}{x}} = 2^{3-\frac{6}{y}} \\ 3^{15y+3x} = 3^{4xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} = 3 - \frac{6}{y} \\ 15y + 3x = 4xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} + \frac{3}{y} = 4 \end{cases}, (x, y) = (5, 3)$$

8. 設某項實驗中，細菌數 1 日後增加為 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 200,000， $4\frac{1}{2}$ 日後細菌數為 1,600,000，則

(1) a 之值為 _____。(2) 細菌數為 3,200,000，所需日數為 _____ 日。

【解答】(1) 4 (2) 5

【詳解】

設原有細菌數為 A ，1 天後為 Aa

3 天後為 $Aa^3 = 200,000 \cdots \cdots \textcircled{1}$ ，

$4\frac{1}{2}$ 天後為 $Aa^{\frac{9}{2}} = 1,600,000 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \text{ 得 } a^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = 2, \quad a = 4$$

\therefore 5 天後細菌數為 $Aa^5 = Aa^3 \cdot a^2 = (200,000)a^2 = (200,000)4^2 = 3,200,000$

9. 方程式 $2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 6$ 之解為 _____。

【解答】 $x = 1$ 或 $x = 2$

【詳解】設 $t = 2^x$

$$\text{原式} \Rightarrow t^2 - 6 \cdot t + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 2, 4$$

$$\Rightarrow 2^x = 2 \text{ 或 } 2^x = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = 2$$

10. $(2 + \sqrt{3})^{2007} (2 - \sqrt{3})^{2008} =$ _____。

【解答】 $2 - \sqrt{3}$

【詳解】

$$\text{原式} = (2 - \sqrt{3})^1 \cdot [(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]^{2007} = (2 - \sqrt{3}) \times (4 - 3)^{2007} = 2 - \sqrt{3}$$

11. 不等式 $(0.1)^{x^2 - 5x + 2} > 100$ 的解為 _____。

【解答】 $1 < x < 4$

【詳解】

$$(0.1)^{x^2-5x+2} > (0.1)^{-2}$$

$$0 < 0.1 < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 2 < -2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$$

12. 設 $a = (0.7)^{\sqrt{2}}$, $b = (0.7)^{\sqrt{3}}$, $c = (0.7)^{-\sqrt{2}}$, $d = (0.7)^{-\sqrt{3}}$, 則 a, b, c, d 之大小順序為

_____。
【解答】 $d > c > a > b$

【詳解】

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} > -\sqrt{2} > -\sqrt{3}, 0 < 0.7 < 1$$

$$\therefore (0.7)^{-\sqrt{3}} > (0.7)^{-\sqrt{2}} > (0.7)^{\sqrt{2}} > (0.7)^{\sqrt{3}}, \text{ 故 } d > c > a > b$$

13. 解不等式：

(1) 不等式 $(0.3)^{x^2-2x-1} > 0.09$ 之解為_____。

(2) 不等式 $27^x - 4 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-1} < 0$ 之解為_____。

【解答】(1) $-1 < x < 3$ (2) $-1 < x < 0$

【詳解】

$$(1) \text{ 原式 } \Rightarrow (0.3)^{x^2-2x-1} > (0.3)^2$$

$$0 < 0.3 < 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 < 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

$$(2) \text{ 原式 } \Rightarrow 3^{3x} - \frac{4}{3} \cdot 3^{2x} + \frac{1}{3} \cdot 3^x < 0 \Rightarrow 3 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 3^x < 0$$

$$\text{設 } t = 3^x \Rightarrow t(t-1)(3t-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < t < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < 3^x < 1 \Rightarrow -1 < x < 0$$

14. (1) $\log_3 \frac{1}{27} =$ _____。

(2) $\log_2 \sqrt[3]{32} =$ _____。

(3) $\log_8 4 =$ _____。

【解答】(1) -3 (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$

【詳解】

$$(1) \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \quad (2) \log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$$

$$(3) \text{ 設 } \log_8 4 = x \Rightarrow 4 = 8^x \Rightarrow 2^2 = (2^3)^x, 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

15. $\log 4 + \log 25 =$ _____。

【解答】2

【詳解】

$$\log 4 + \log 25 = \log(4 \times 25) = \log 100 = \log 10^2 = 2$$