高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.02.26					
範圍	1-1 指數函數	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. $a>0$，$a\neq 1$，且$\sqrt[4]{\sqrt{a}\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=a^x$，則$x$之值爲(A)$\frac{1}{6}$ (B)$\frac{5}{48}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{1}{2}$ (E)$\frac{2}{3}$

【解答】(A)

【詳解】

$$\sqrt[4]{\sqrt{a}\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=[a^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{a}{a^{\frac{2}{3}}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}}=[a^{\frac{1}{2}}\cdot(a^{1-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}}=\ a^{\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}}=a^{\frac{4}{24}}=a^{\frac{1}{6}}\text{，}x=\frac{1}{6}$$

2. 指數式$(-2)^{-1}$爲(A)2 (B)$\frac{-1}{2}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)-2 (E)無意義

【解答】(B)

【詳解】$(-2)^{-1}=\frac{1}{(-2)^1}=-\frac{1}{2}$

3. 設某一項新試驗中，細菌數目一天後增加a倍，且已知 3 天後細菌數爲 200,000 個，$4\frac{1}{2}$天後細菌數爲 1,600,000 個，則 5 天後細菌數爲
(A)2,000,000 (B)2,500,000 (C)3,200,000 (D)3,500,000 (E)3,600,000 個

【解答】(C)

【詳解】

設原有細菌數爲A，1 天後爲$A(1+a)$

3 天後爲$A(1+a)^3=200,000\cdots\cdots$①，

$4\frac{1}{2}$天後爲$A(1+a)^{\frac{9}{2}}=1,600,000\cdots\cdots$②

$\frac{②}{①}$得$(1+a)^{\frac{3}{2}}=8 \quad\Rightarrow\quad (1+a)^{\frac{1}{2}}=2\Rightarrow 1+a=4$，$a=3$

∴ 5 天後細菌數爲$A(1+a)^5=A(1+a)^3\cdot(1+a)^2$

$=(200,000)(1+a)^2=(200,000)(1+3)^2=3,200,000$

4. 設$a=(0.5)^{0.5}$，下列哪一項是正確的？
(A) $a<0.5$ (B) $0.5\le a<0.6$ (C) $0.6\le a<0.7$ (D) $0.7\le a<0.8$ (E) $a\ge 0.8$

【解答】(D)

【詳解】

$$a=(0.5)^{0.5}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\frac{1^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.4142}{2}=0.7071$$

5. 解聯立方程式$\begin{cases} 9^x \cdot 4^{2y} = 3981312 \\ 5^{2x} \cdot 4^y = 400000 \end{cases}$，則得

(1) $x =$ (A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 2　(D) $\frac{5}{2}$　(E) 3

(2) $y =$ (A) $\frac{7}{2}$　(B) 4　(C) $\frac{9}{2}$　(D)5　(E) $\frac{11}{2}$

【解答】(1) (D)　(2) (A)

【詳解】

$9^x \cdot 4^{2y} = 3981312 \quad \Rightarrow \quad 3^{2x} \cdot 2^{4y} = 3^5 \cdot 2^{14}$，

$5^{2x} \cdot 4^y = 400000 \quad \Rightarrow \quad 5^{2x} \cdot 2^{2y} = 5^5 \cdot 2^7$

$\therefore \quad \begin{cases} 2x = 5 \\ 5y = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$

6. $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{2-\sqrt{3}}$ 之値爲(A) 1　(B) $2-\sqrt{3}$　(C) $2+\sqrt{3}$　(D) 0　(E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

【解答】(A)

【詳解】

$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}$

$= (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = [(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^{\frac{1}{2}} = 1$

7. 已知 $2^{0.6} = 1.516$，$2^{0.03} = 1.021$，則下列各數值，哪一個與 $2^{1.23}$最接近？

(A) 4.05　(B) 2.54　(C) 2.35　(D) 2.31　(E) 3.27

【解答】(C)

【詳解】

$2^{1.23} = 2^{0.6+0.6+0.03} = (2^{0.6})^2 \cdot (2^{0.03}) = (1.516)^2 \cdot (1.021) = 2.298256 \times 1.021 = 2.346519376 \doteqdot 2.35$

8. (複選)下列等式何者正確？

(A) $\sqrt{(-3)^2} = 3$　(B) $(-\sqrt{3})^2 = -3$　(C) $\sqrt{(-2)^3} = -\sqrt{2^3}$

(D) $\sqrt[3]{(-2)^4} = -\sqrt[3]{2^4}$　(E) $\sqrt[3]{(-2)^5} = -\sqrt[3]{2^5}$

【解答】(A)(E)

【詳解】

(A) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$　(B) $(-\sqrt{3})^2 = -3$　(C) $\sqrt{(-2)^3} = \sqrt{-2^3} \neq -\sqrt{2^3}$

(D) $\sqrt[3]{(-2)^4} = \sqrt[3]{2^4}$　(E) $\sqrt[3]{(-2)^5} = -\sqrt[3]{2^5}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 $a > 0$，且 $a^{2x} = 3$，求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} =$ ________。

【解答】$\dfrac{14}{3}$

【詳解】分子、分母同乘以a^{x}

原式$=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{(a^{2x})^{2}+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}=\dfrac{3^{2}+3^{-1}}{3-1}=\dfrac{9+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{\frac{28}{3}}{2}=\dfrac{14}{3}$

2. 若$a^{x}+a^{-x}=5$，則$a^{3x}+a^{-3x}=$__________。

【解答】110

【詳解】求值公式：$a^{3}+b^{3}=(a+b)^{3}-3ab(a+b)$

$a^{x}+a^{-x}=5$，$a^{3x}+a^{-3x}=(a^{x}+a^{-x})^{3}-3a^{x}\cdot a^{-x}(a^{x}+a^{-x})=5^{3}-3\times5=110$

3. 設$a^{2x}=\sqrt{2}+1$，則$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}$之値爲__________。

【解答】$2\sqrt{2}+1$

【詳解】公式：$a^{3}+b^{3}=(a+b)(a^{3}-ab+b^{3})$

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=\frac{(a^{x}-a^{-x})(a^{2x}+a^{x}\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^{x}-a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}+1$$

$$=\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1=\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+1=2\sqrt{2}+1$$

4. 若$x>0$，且$x+x^{-1}=7$，求$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=$__________。

【解答】3

【詳解】公式：$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$

$x+x^{-1}=7$，$x>0$，$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^{2}=x+2+x^{-1}=7+2=9$，$\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\pm3$（$-3$不合）

5. 求值：$(\dfrac{81}{16})^{-0.25}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[6]{4}}=$__________。

【解答】2

【詳解】

$$(\frac{81}{16})^{-0.25}\cdot\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[6]{4}}=(\frac{3}{2})^{4\cdot(-0.25)}\cdot\frac{(2\cdot3^{3})^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{6}}}=(\frac{3}{2})^{-1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot3}{2^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}\cdot3=2$$

6. 若$2^{x+1}-3\cdot2^{-x}+5=0$，求$x=$__________。

【解答】-1

【詳解】

原式$=2\cdot2^{x}-3\cdot2^{-x}+5=0\quad\Rightarrow\quad2\cdot(2^{x})^{2}-3+5\cdot2^{x}=0$

令$2^{x}=t$，得$2t^{2}+5t-3=0\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{1}{2}$或$-3$

$\therefore\quad2^{x}=\dfrac{1}{2}$或$2^{x}=-3$（不合），$\therefore x=-1$

7. 若 $x \in R$，則方程式 $2^x + 2^{x+2} + 2^{x+4} = 2 \cdot 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$ 的解爲__________。

【解答】1

【詳解】

原式化爲 $2^x + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^4 = 2 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow 2^x(1+4+16) = 3^x(2+3+9)$

$\Rightarrow 21 \cdot 2^x = 14 \cdot 3^x \Rightarrow \dfrac{2^x}{3^x} = \dfrac{14}{21} \Rightarrow (\dfrac{2}{3})^x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 1$

8. 設 $2^x = 3^y = 216$，則 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ 之值爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{3}$

【詳解】

$2^x = 6^3 \Rightarrow 2 = 6^{\frac{3}{x}} \cdots\cdots$①，

$3^y = 6^3 \Rightarrow 3 = 6^{\frac{3}{y}} \cdots\cdots$②

①×②得 $6 = 6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}} \Rightarrow \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$

9. $[(\sqrt{\pi} + \sqrt[3]{3})^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{7}} \cdot 2^{\frac{3}{17}}]^0 + [(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2]^{\frac{1}{2}} =$__________。

【解答】$1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

【詳解】原式 $= 1 + [(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2]^{\frac{1}{2}} = 1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

10. 解 $9^{2x^2} = 9 \cdot 3^{7x}$，得 $x =$__________。

【解答】$-\dfrac{1}{4}$ 或 2

【詳解】

原式 $\Rightarrow 3^{4x^2} = 3^{7x+2} \Rightarrow 4x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow (4x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ 或 2

11. $(3.5)^x = (0.035)^y = 100$，則 $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} =$__________。

【解答】1

【詳解】

$$\begin{cases} (3.5)^x = 100 \Rightarrow 3.5 = 100^{\frac{1}{x}} & \cdots\cdots① \\ (0.035)^y = 100 \Rightarrow 0.035 = 100^{\frac{1}{y}} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

$\dfrac{①}{②}$ 得 $100^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = \dfrac{3.5}{0.035} = 100$， $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1$

12.化簡$\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^5}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt{x^3}}}=x^r$，$r$ 爲實數，則$r=$__________。

【解答】$\dfrac{17}{12}$

【詳解】

$$\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^5}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt{x^3}}}=\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{2}}}{(x^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{17}{6}}}{(x^{\frac{17}{6}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{17}{6}}}{x^{\frac{17}{12}}}=x^{\frac{17}{6}-\frac{17}{12}}=x^{\frac{17}{12}}=x^r\text{，}\therefore r=\frac{17}{12}$$

13.假設某國家 40 年後人口將增爲目前的 2 倍，問 10 年後人口會是目前的__________倍。

【解答】$2^{\frac{1}{4}}$

【詳解】

設目前人口數爲a人，且每隔 1 年人口數爲原來的r倍

1 年後人口數爲ar人，2 年後人口數爲ar^2人，⋯，40 年後人口數爲ar^{40}人

$\therefore\quad 2a=a\cdot r^{40}\quad\Rightarrow\quad r^{40}=2\quad\Rightarrow\quad r^{10}=2^{\frac{1}{4}}$

則 10 年後人口數爲$a\cdot r^{10}=a\cdot 2^{\frac{1}{4}}$人，∴10 年後人口數爲目前的$2^{\frac{1}{4}}$倍

14.設$\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$且$3^{15y+3x}=81^{xy}$，則$(x，y)=$__________。

【解答】(5，3)

【詳解】

$$\begin{cases}\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}\\3^{15y+3x}=81^{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{\frac{5}{x}}=2^{\frac{3y-6}{y}}\\3^{15y+3x}=3^{4xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}=\dfrac{3y-6}{y}\\15y+3x=4xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}=3-\dfrac{6}{y}\\\dfrac{15y+3x}{xy}=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=3\\\dfrac{15}{x}+\dfrac{3}{y}=4\end{cases}\text{，}\quad(x，y)=(5，3)$$

15.方程式$x^{x+4}=x^8$的解爲__________。

【解答】$x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=4$

【詳解】$x^{x+4}=x^8$

觀察① $x=1$ 時，合，② $x=-1$ 時，不合，③ $x=0$ 時，合

又④ $x\neq 0$，1，-1 時，$x+4=8$，$x=4$

16.方程式$2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12$之解爲__________。

【解答】3

【詳解】$2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}+10\cdot 2^{x-2}=12\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2^x-6\cdot 2^x\cdot 2^{-1}+10\cdot 2^x\cdot 2^{-2}=12$

$\Rightarrow \quad (2-\frac{6}{2}+\frac{10}{4})\cdot 2^x=12 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\cdot 2^x=12 \quad \Rightarrow \quad 2^x=8 \quad \Rightarrow \quad x=3$

17.解 $2(4^x+4^{-x})-9(2^x+2^{-x})+14=0$，得$x=$__________。

【解答】$x=0$，± 1

【詳解】

設$t=2^x+2^{-x}\geq 2$，則$t\geq 2$，且$t^2=(2^x+2^{-x})^2=4^x+2+4^{-x} \quad \Rightarrow \quad 4^x+4^{-x}=t^2-2$

$\therefore \quad 2(t^2-2)-9t+14=0 \quad \Rightarrow \quad 2t^2-9t+10=0 \quad \Rightarrow \quad (2t-5)(t-2)=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{5}{2}$ 或 2

① $t=\frac{5}{2}$時，$2^x+2^{-x}=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$，

② $t=2$ 時，$2^x+2^{-x}=2 \quad \Rightarrow \quad x=0$，故得$x=0$，$\pm 1$

18.$(2+\sqrt{3})^{\frac{2001}{2}}(2-\sqrt{3})^{\frac{1999}{2}}=$__________。

【解答】$2+\sqrt{3}$

【詳解】

原式 $=(2+\sqrt{3})^1\cdot[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^{\frac{1999}{2}}=(2+\sqrt{3})\times(4-3)^{\frac{1999}{2}}=2+\sqrt{3}$

19.指數不等式$(0.125)^x<0.25<2^{-2x}$的解爲__________。

【解答】$\frac{2}{3}<x<1$

【詳解】

$(0.125)^x<0.25<2^{-2x} \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{8})^x<\frac{1}{4}<2^{-2x} \quad \Rightarrow \quad 2^{-3x}<2^{-2}<2^{-2x} \quad \Rightarrow \quad -3x<-2<-2x$

$$\begin{cases}-3x<-2\\-2<-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{3}\\1>x\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1>x>\frac{2}{3}$$