高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.01.09					
範圍	3-4 多項函數	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 針對二次函數 $y=2x^2+4x-3$ 的極值討論，以下何者正確？

(A) y 有最大值 -5　(B) y 有最小值 -3　(C) $-2\le x\le 2$ 時，y 有最大值 13

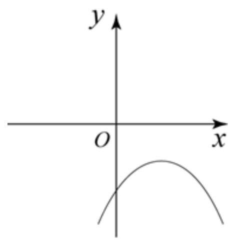
(D) $-2\le x\le 2$ 時，y 有最小值 -3　(E) $0\le x\le 2$ 時，y 有最小值 -5

解析：$y=2x^2+4x-3=2(x^2+2x+1)-5=2(x+1)^2-5$，$\therefore$ y 最小值 -5

當 $-2\le x\le 2$ 時，y 有最大值 13，最小值 -5，

$0\le x\le 2$ 時，y 有最小值 -3

2、(B) 若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，則下列那一項確定為正？

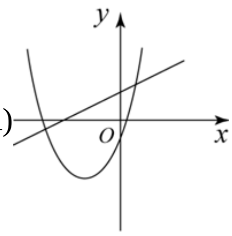


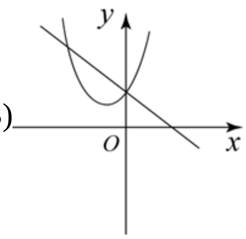
(A) a　(B) b　(C) c　(D) b^2-4ac　(E) $100a+10b+c$

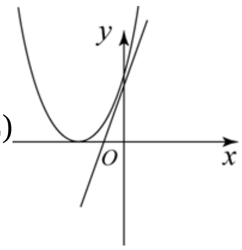
解析：開口向下 $a<0$，y 軸交點 $c<0$，頂點於 y 軸右方 $-\dfrac{b}{2a}>0\Rightarrow b>0$

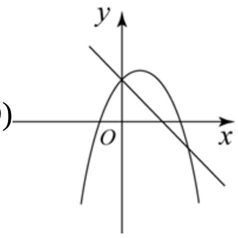
x 軸沒交點 $b^2-4ac<0$，$x=10$ 代入 $\Rightarrow 100a+10b+c<0$

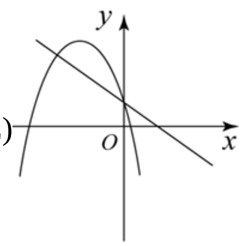
3、(C) 在 xy 平面上，畫出 $y=mx+b$，與 $y=ax^2+mx+b$ ($a\neq 0$)的圖形，下面那一個選項可能發生？

(A)


(B)


(C)


(D)


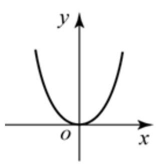
(E)


解析：$\because y=ax^2+mx+b$ 為 $y=mx+b$ 與 $y=ax^2$ 相加而得

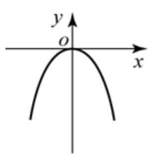
又 $y=mx+b$ 與 $y=ax^2$ 兩圖形之 y 截距均相同為 $(0, b)$

$y=ax^2$ 圖形如下：

(1)當 $a>0$ 時



(2)當 $a<0$ 時



$a>0$ 時 $y=ax^2+mx+b$ 恆大於 $y=mx+b$，即 $y=ax^2+mx+b$ 圖形恆於 $y=mx+b$ 上方

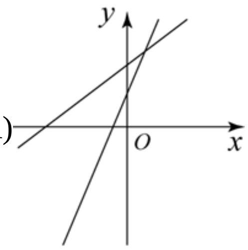
$a<0$ 時 $y=ax^2+mx+b$ 恆小於 $y=mx+b$，即 $y=ax^2+mx+b$ 圖形恆於 $y=mx+b$ 下方

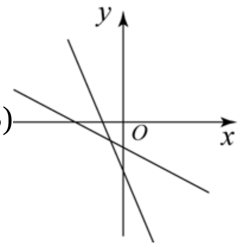
4、(E)　已知抛物線 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形與 x 軸不相交，則其條件爲

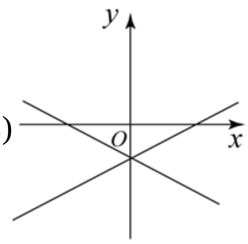
(A) $a>0$　(B) $a<0$　(C) $ab<0$　(D) $ac>0$　(E) $b^2-4ac<0$

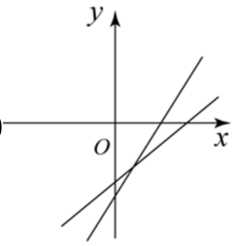
$\boxed{\text{解析}}$：$\because$ 與 x 軸不相交，$\therefore b^2-4ac<0$

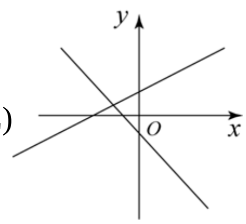
5、(A)　在 xy 平面上畫出 $y=ax+b$ 與 $y=bx+a$ 的圖形 $(a\neq b)$，下面那一個選項可能發生？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{cases} y=ax+b \\ y=bx+a \end{cases} \Rightarrow (1,a+b)$，故只剩下(A)與(D)，

因爲(D)中 2 線斜率 a,b 爲正，但截距 b,a 均負。(不合)

6、(CDE)(複選)對於二次函數 $f(x)=-x^2+x+3$ 的敘述，下列何者正確？

(A)頂點 $(\frac{1}{2},\ 3)$　(B)對稱軸 $x+\frac{1}{2}=0$　(C)若 $-1\le x\le 1$，則 $f(x)$ 之最大值 $\frac{13}{4}$

(D)若 $-2\le x\le 0$，則 $f(x)$ 之最大值 3　(E)將 $y=-x^2+x+3$ 的圖形水平右移 2 單位，再鉛直下移 1 單位所得的拋物線方程式爲 $y=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}$

$\boxed{\text{解析}}$：$y=f(x)=-x^2+x+3=-[x^2-x+(\frac{1}{2})^2]+3+(\frac{1}{2})^2=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$，

頂點 $(\frac{1}{2},\frac{13}{4})$，對稱軸 $x-\frac{1}{2}=0$，

當 $-1\le x\le 1$ 時，y 有最大值 $\frac{13}{4}$、最小值 3

當 $-2\le x\le 0$ 時，y 有最大值 3、最小值 -3

$y=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$ 的圖形水平右移 2 單位，再鉛直下移 1 單位所得的拋物線方程式爲

$y=-[x-(\frac{1}{2}+2)]^2+(\frac{13}{4}-1)\Rightarrow\ y=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}$

7、(BD)　(複選)設 $f(x)=x^2+a(1-x^2)$ 爲一實係數多項式函數，a 爲常數。

下列敘述何者正確：

(A)不論a是何值，$f(x)$的函數圖形都不可能是直線。

(B)不論a是何值，若$f(x)$有極值，極值都等於a。（極大值與極小值統稱極值)

(C) 0有可能是$f(x)$的極大值。

(D)若$a\neq 0$，則$f(x)=0$無重根。

$\boxed{解析}$：$y=f(x)=x^2+a(1-x^2)\Rightarrow y=(1-a)x^2+a$

(A)當$a=1$時, $f(x)=1$，圖形爲一水平直線

(B)當$a<1$時，$f(x)$在$x=0$時，有極小值a

當$a>1$時，$f(x)$在$x=0$時，有極大值a

當$a=1$時，$f(x)=1$在x爲任意實數時，均有極值$1=a$

綜合以上討論知：不論a爲何值，極值均等於a

(C)由(B)知，$f(x)$之極值均爲a

∴若0要爲$f(x)$之極值，則a必須爲0，而$a=0$時是產生極小值非極大值

(D)①若$a=1$，則$f(x)=1$ ∴ $f(x)=0$無解，當然無重根

②若$a\neq 1$則$f(x)=(1-a)x^2+a$

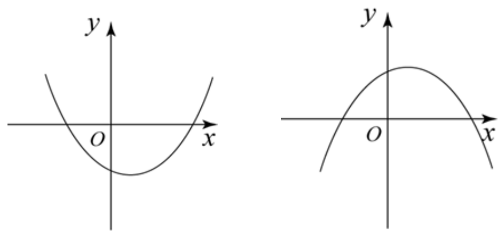
判別式$D=0^2-4\times(1-a)\times a=4a^2-4a=4a(1-a)\neq 0$ $(\because a\neq 0,1)$，

$\therefore f(x)=0$ 無重根

8、(C) 已知二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形，會通過四個象限，則其條件爲何?

(A) $b^2-4ac>0$ (B) $ac>0$ (C) $ac<0$ (D) $a>0$ (E) $a<0$

$\boxed{解析}$：條件爲$ac<0$或$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<0$即兩實根異號



二、填充題 (每題 10 分)

1、 二次函數$y=f(x)=ax^2+bx-5$已知$f(-3)=f(1)$且$f(3)=35$，則$-\dfrac{b}{2a}=$____ ,$b=$_____。

$\boxed{答案}$：$-1,\ \dfrac{16}{3}$

$\boxed{解析}$：$\because f(-3)=f(1)\ \Rightarrow y=f(x)$過$(-3,f(-3)),(1,f(1))$，

∴頂點x坐標$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-3+1}{2}=-1$, $\therefore b=2a$

$\because f(3)=35,\ \ 9a+3b=40,\ \ 15a=40$, $\therefore a=\dfrac{8}{3},\ b=\dfrac{16}{3}$

2、 某次考試，班上同學得最高分爲 55分，最低分爲15分，經同學要求將分數調整，老師決定用一線型函數來加分使 55分變成 90分，15分變成 60分，今已知甲原考 23分，試問調整後爲_________分。

$\boxed{答案}$：66

$\boxed{解析}$：設該線型函數 $y=f(x)=ax+b$，x 表原分數，y 表新分數

$\therefore \begin{cases}90=55a+b\\60=15a+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=\dfrac{195}{4}\end{cases}$，故 $y=f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{195}{4}$；

$\therefore f(23)=\dfrac{3}{4}\times 23+\dfrac{195}{4}=66$（分）。

3、將二次函數 $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-2$ 的圖形向 x 軸方向左移 h 個單位，y 軸方向向下移 k 個單位後，得新的二次函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x-4$，則數對 $(h,k)=$____________。

$\boxed{答案}$：$(3,\ \dfrac{5}{2})$

$\boxed{解析}$：新的二次函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x-4=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-\dfrac{9}{2}$

頂點由 $(2,-2)$ 向 x 軸方向左移 h 個單位，y 軸方向向下移 k 個單位後爲 $(-1,\dfrac{9}{2})$，

$(2-h,-2-k)=(-1,\dfrac{9}{2})\Rightarrow h=3,k=\dfrac{5}{2}$

4、 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(-1,\ 1)$，且在 $x=-2$ 時有最大值 3，則此二次函數爲 $y=$______

$\boxed{答案}$：$-2x^2-8x-5$

$\boxed{解析}$：設 $y=a(x+2)^2+3$ 且 $a<0$，$(-1,\ 1)$ 代入 $1=a+3$， $\therefore a=-2$

$\therefore y=-2(x+2)^2+3=-2x^2-8x-5$

5、 二次函數 $y=x^2+2(a+1)x+a^2+4a+6$ 與二次函數 $y=-x^2+2bx-b^2+2b-1$ 有相同的頂點，則 $a=$________, $b=$________。

$\boxed{答案}$：$-2,\ \ 1$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases}y=(x+a+1)^2+2a+5\\y=-(x-b)^2+2b-1\end{cases}$，頂點相同 $\Rightarrow \begin{cases}-a-1=b\\2a+5=2b-1\end{cases} \Rightarrow a=-2,\ b=1$

6、 一個二次函數，通過 $(3,1),(1,1)$ 和 $(-1,5)$ 三點，求此二次函數 $y=$__________________，又其頂點坐標爲_____________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{5}{2},\ \ (2,\dfrac{1}{2})$

$\boxed{解析}$：通過 $(3,1),(1,1)$，即頂點 $(2,k)$，

設二次函數 $y=a(x-2)+k$ 代入 $(-1,5)$,$(1,1)$,得 $a=\dfrac{1}{2},k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{5}{2}$，且頂點爲 $(2,\dfrac{1}{2})$

7、 設 $y=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-9)^2$ ，則當 $x=$＿＿＿＿＿時，y 有最小值為＿＿＿＿＿。

答案：4, 38

解析： $y=3x^2-24x+86=3(x-4)^2+38$ ，$\therefore x=4$ ，y 有最小值 38

8、將 15 分成兩個整數，使其乘積為最大，則此二數為＿＿＿＿＿與＿＿＿＿＿。

答案：7, 8

解析： $x+y=15$ 時 xy 之 max，此時 $x=y$，但 x、y 均為整數，故取二數為 7 與 8。

9、設某個二次函數其頂點在(2, 3)，且經過點(3,–1)，則此函數方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $y=-4x^2+16x-13$

解析：設 $y=a(x-2)^2+3$ ，(3, –1)代入 $-1=a+3,\ \therefore a=-4$ ，

故 $y=-4(x-2)^2+3=-4x^2+16x-13$ 。

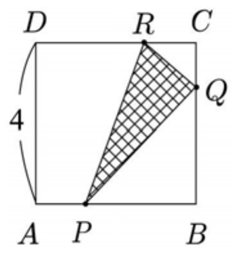
10、將二次函數 $y=2x^2-4x+3$ 之圖形沿著 x 軸向左平移 2 個單位，沿著 y 軸向上平移 3 個單位後所得到之新方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿。（以 $y=ax^2+bx+c$ 表示）

答案： $y=2x^2+4x+6$

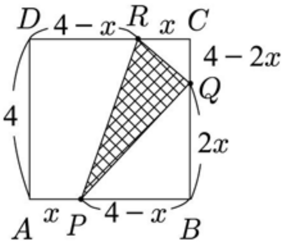
解析：原方程式 $y=2x^2-4x+3=2(x^2-2x+1^2)+3-2\times1^2=2(x-1)^2+1\Rightarrow$ 頂點 $(1,1)$

平移後：新頂點 $(1-2,1+3)=(-1,4)\Rightarrow$ 新方程式 $y=2(x+1)^2+4=2x^2+4x+6$ 。

11、在邊長為 4 的正方形 $ABCD$ 的三邊長 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD}$ 上各取一點 P,Q,R，使 $2\overline{AP}=\overline{BQ}=2\overline{CR}$，則 $\triangle PQR$ 的最小面積為＿＿＿＿，此時 $\overline{AP}=$＿＿＿＿。



答案： $\dfrac{7}{2}$； $\dfrac{3}{2}$



解析： $\triangle PQR$ 面積 $=16-\dfrac{4\cdot(4-x+x)}{2}-\dfrac{1}{2}(4-x)\cdot2x-\dfrac{1}{2}x\cdot(4-2x)$

$=2x^2-6x+8=2(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{7}{2}$

$\therefore$ 當 $x=\dfrac{3}{2}$ 時，最小值 $=\dfrac{7}{2}$ 。

即 $\overline{AP}=\dfrac{3}{2}$ 時， $\triangle PQR$ 的最小面積為 $\dfrac{7}{2}$ 。

12、果園中種了 45 棵橘子樹，平均每棵年產 300 個橘子，依過去經驗，在此果園中，每加種一棵橘子樹則平均每棵年產量減少 5 個，試問應加種多少棵，才能使年總產量最大？又最大年總產量為多少個橘子？

答案：設加種 x 棵，可得年總產量 y 個橘子

$y=(45+x)(300-5x)$

$=-5x^2+75x+13500$

$=-5(x^2-15x)+13500$

$=-5(x-\frac{15}{2})^2+13500+5\times(\frac{15}{2})^2$

但 $x\in\mathbb{Z}$， $\therefore$應加種 7 棵可得最大產量 $f(7)=(45+7)(300-35)=13780$

13、設 $y=f(x)=(x^2+2x+1)(x^2+2x+5)-2(x^2+2x+7)+9$ ，則當 $x=$________時， $f(x)$ 有最小值爲________ 。

$\boxed{答案}$：$-1,\ \ -3$

$\boxed{解析}$：設 $t=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

原式 $y=t(t+4)-2(t+6)+9=t^2+2t-3=(t+1)^2-4$ 但 $t\geq 0$

$\therefore$在 $t=0$ 即 $x=-1$ 時 $f(x)$有最小値 -3

14、設 $y=x^2-2x-5$ 與 $y=2x-1$ 兩圖形交於 A, B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之長爲________ 。

$\boxed{答案}$：$4\sqrt{10}$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases} y=x^2-2x-5 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow\ \ x^2-4x-4=0$ 其解爲 α,β 故 $\alpha+\beta=4,\ \ \alpha\beta=-4,$

且 $A(\alpha,2\alpha-1),\ B(\beta,2\beta-1)$

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-1-2\beta+1)^2}=\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{5}|\alpha-\beta|$

$(|\alpha-\beta|)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16+16=32\ \Rightarrow|\alpha-\beta|=4\sqrt{2}$ ，$\therefore\overline{AB}=\sqrt{5}\times4\sqrt{2}=4\sqrt{10}$

15、 $k\in\mathbb{R}$，試就 k 値討論方程式 $|x^2-3x|+x-4=k$ 的相異實根的個數。

(1)當__________時，有 1 個實根

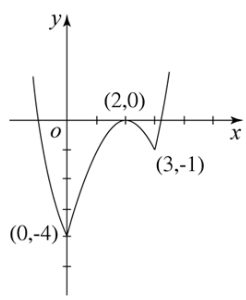
(2)當__________時，有 2 個相異實根，

(3)當__________時，有 3 個相異實根，

(4)當__________時，有 4 個相異實根

(5)當__________時，無實根

$\boxed{答案}$：方程式 $|x^2-3x|+x-4=k\Rightarrow$即解聯立方程組 $\begin{cases} y=|x^2-3x|+x-4 \\ y=k \end{cases}$



使 $x^2-3x=0,\quad x(x-3)=0\Rightarrow\ x=0$ 或 3

$y=|x^2-3x|+x-4$

x	0	2	3
y	-4	0	-1

當 $x\geq 3$ 或 $x\leq 0$ 時 $y=x^2-2x-4=(x-1)^2-5$

當 $0<x<3$ 時 $y=-x^2+4x-4=-(x-2)^2+0$

圖形如右上

(1) $k=-4$ 時，有 1 個實根

(2) $k>0$ 或 $-4<k<-1$ 時，有 2 個相異實根，

(3) $k=0$ 或 -1 時，有 3 個相異實根，

(4) $-1<k<0$ 時，有 4 個相異實根

(5) $k<-4$ 時，無實根