高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：97.01.02					
範圍	3-3 HCF；LCM	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式爲 $(x+1)(x-2)(x+3)$ 則下列那一組 $f(x),g(x)$ 合於此條件？ (A) $f(x)=x^2+4x+3$， $g(x)=x^2+6x+9$
(B) $f(x)=x^2-x-2$， $g(x)=x^2+4x+3$ (C) $f(x)=x^2+5x-6$， $g(x)=x^2-x-2$
(D) $f(x)=x^2+3x+2$， $g(x)=x^2+x-6$ (E) $f(x)=x-2$， $g(x)=x^3-7x-6$

解析： (A) $f(x)=(x+1)(x+3)$， $g(x)=(x+3)^2$ (不合)
(B) $f(x)=(x-2)(x+1)$， $g(x)=(x+1)(x+3)$
(C) $f(x)=(x+6)(x-1)$ (不合)
(D) $f(x)=(x+1)(x+2)$ (不合)
(E) $f(x)=(x-2)$， $g(x)=(x+2)(x-3)(x+1)$ (不合)

2、(C) 若 $f(x)=x^3+ax^2+4x-7$ 與 $g(x)=x^2+bx+5$ 之最高公因式爲整係數一次式且 $a,b\in\mathbb{N}$ ，則 $a+2b=$ ？ (A)18 (B)20 (C)24 (D)28 (E)30

解析：由牛頓一次因式檢查法知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 可能的一次公因式爲 $x\pm1$
若 $(f(x),g(x))=x-1, g(1)=0\Rightarrow b=-6$（不合）
若 $(f(x),g(x))=x+1,\begin{cases}g(-1)=0\\ f(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=12\\ b=6\end{cases}$ ，$\therefore a+2b=24$

3、設 $f(x)=(x-2)(x^2-5x+6)$， $g(x)=(x^2-4x+3)(x-1)$， $h(x)=(x-3)(x^2-3x+2)$ 則
(1) (D) $f(x)$， $g(x)$， $h(x)$ 的最高公因式爲
(A)1 (B) $x-1$ (C) $x-2$ (D) $x-3$ (E) x^2-5x+6 。
(2) (B) $f(x),g(x),h(x)$ 的最低公倍式爲
(A) $(x-1)^2(x-2)(x-3)$ (B) $(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$
(C) $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2$ (D) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$
(E) $(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$ 。

解析： $f(x)=(x-2)^2(x-3)$ ； $g(x)=(x-1)^2(x-3)$ ； $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ ；
(1) hcf $=x-3$ (2) lcm $=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 求 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ 與 $g(x)=x^4+x^3-x-1$ 之最高公因式爲_______。

答案： x^2-1

解析：

1	$1-2-1+2$	$1+1+0-1-1$	1
	$1+0-1$	$1-2-1+2$	
-2	$-2+0+2$	$3+1-3-1$	3
	$-2+0+2$	$3-6-3+6$	
	0	7 $7+0-7$	
		$1+0-1$	

故最高公因式爲 x^2-1 。

2、 $k\in\mathbb{R}$，多項式 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$，$g(x)=x^3+(k+2)x^2+(k^2-5)x+6$，

(1)若 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 爲一次式時，$k=$________，此時 $H(x)=$________。

(2)若 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 爲二次式時，$k=$________，此時 $H(x)=$________。

答案：(1) $-2,-3$；$(x+2)$ 或 $(x-1)$　　(2) 4；$(x+1)(x+2)$

解析：$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)$

若 $x+2\mid g(x)\Rightarrow g(-2)=0\Rightarrow -2k^2+4k+16=0\Rightarrow -2(k-4)(k+2)=0\Rightarrow k=4,-2$

若 $x+1\mid g(x)\Rightarrow g(-1)=0\Rightarrow -k^2+k+12=0\Rightarrow -(k-4)(k+3)=0\Rightarrow k=4,-3$

若 $x-1\mid g(x)\Rightarrow g(1)=0\Rightarrow k^2+k+4=0\Rightarrow k$ 無實數解 (因爲 $\delta<0$)

$\therefore$ 當 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式爲一次時 $k=-2$ 或 -3，$H(x)=(x+2)$ 或 $(x-1)$

又當 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式爲二次時 $k=4$，$H(x)=(x+1)(x+2)$

3、 設 $f(x)=x^3+cx^2-x+2$ 與 $g(x)=x^2+cx-2$ 的最高公因式爲一次式，求

(1) $c=$______，(2)最低公倍式爲________________________。

答案：(1)1　　(2) $(x+2)(x-1)(x^2-x+1)$

解析：(1)設 $d(x)=(f(x),g(x))$，且 $\deg(d(x))=1$

$$\therefore\begin{cases} d(x)\mid f(x)=x^3+cx^2-x+2 \\ d(x)\mid g(x)=x^2+cx-2 \end{cases}\Rightarrow d(x)\mid f(x)-xg(x)=x+2,\ \therefore d(x)=x+2$$

$\therefore g(-2)=0=4-2c-2,\ \therefore c=1$。

(2)因式分解 $f(x)=x^3+x^2-x+2=(x+2)(x^2-x+1)$

$g(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$\therefore [f(x),g(x)]=(x+2)(x-1)(x^2-x+1)$。

4、 設 $f(x)=x^2+(k+1)x-2k$，$g(x)=x^2+(k-1)x+(6-2k)$ 已知 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 爲一次式，則 $H(x)=$________，又 $k=$________。

答案：$x-3,-12$

解析：$H(x)\mid f(x)-g(x)$，$\therefore H(x)\mid 2x-6$，取 $H(x)=x-3$，$f(3)=0$，$\therefore k=-12$

5、 求 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 與 $g(x)=x^3-x^2+4x-12$ 的最高公因式爲________，最低公倍式爲____________________。

答案：$x-2$；$(x-2)(x+5)(x+1)(x^2+x+6)$

解析：利用輾轉相除法

1	$1+4-7-10$	$1-1+4-12$	
	$1-1+4-12$	$\times\quad 5$	
5	$5-11+2$	$5-5+20-60$	1
	$5+15-50$	$5-11+2$	
	-26 $\vert$ $-26+52$	6 $\vert$ $6+18-60$	
	$1-2$	$1+3-10$	$1+5$
		$1-2$	
		$5-10$	
		$5-10$	
		0	

$\therefore (f(x), g(x)) = x-2$

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)\cdot g(x)}{x-2} = \frac{f(x)\cdot(x-2)(x^2+x+6)}{x-2}$$
$$= (x^3+4x^2-7x-10)(x^2+x+6) = (x-2)(x+5)(x+1)(x^2+x+6)$$

6、 設兩個整係數多項式 $f(x)$, $g(x)$ 和爲 $2x^3+5x^2+5x+3$，最低公倍式爲 x^4+4x^3-x-4，則最高公因式爲______，已知 $f(x)$ 最高次項係數爲 1 且 $f(1)>g(1)$ 則 $f(x)=$______。

答案：$x^2+x+1,\ x^3+5x^2+5x+4$

解析：$H(x)=$"$(f(x)+g(x))$與 LCM$(f(x), g(x))$"的最高公因式

$\therefore f(x)+g(x)=2x^3+5x^2+5x+3=(2x+3)(x^2+x+1)$

$\text{LCM}=(x^2+x+1)(x^2+3x-4)=(x+4)(x-1)(x^2+x+1)$

$\because f(1)>g(1)$，$\therefore f(x)=(x+4)(x^2+x+1)=x^3+5x^2+5x+4$，且 $H(x)=x^2+x+1$

7、 設 $f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$ 與 $g(x)=2x^3-7x^2+(2a-8)$ 的最低公倍式爲五次式，求 $a=$_

答案：3

解析：$(f(x), g(x))[f(x), g(x)] = f(x)\cdot g(x)$，故最低公倍式五次式$\Rightarrow$最高公因式一次式

設 $d(x)=(f(x), g(x))$，且 $\deg(d(x))=1$

$\therefore d(x)\mid f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$；$d(x)\mid g(x)=2x^3-7x+(2a-8)$

$\Rightarrow d(x)\mid 2f(x)-g(x)=2x^2-x-6=(2x+3)(x-2)$

$\therefore d(x)=x-2$ $(\because 2x+3\nmid f(x))$，故 $g(x)=16-14+2a-8=0\Rightarrow a=3$。

8、 若兩多項式 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$ 與 $g(x)=3x^3-6x^2+2x+(3c+5)$ 的最高公因式爲一次式，則 c 之值爲________。

答案：2

解析：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式爲 $h(x)$，則

$$\begin{cases} h(x)\mid f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4) \\ h(x)\mid g(x)=3x^3-6x^2+2x(3c+5) \end{cases} \Rightarrow h(x)\mid 3f(x)-2g(x)=2x+2=2(x+1)$$

$\therefore h(x)=x+1\Rightarrow f(-1)=-2-4-2+2c+4=0$；$2c=4, c=2$。

9、已知 $f(x)=x^3+ax^2-2x-4$, $g(x)=4x^3+x^2-2a^2x-2$ 最高公因式 $H(x)$ 爲二次式，則 $a=$________，又 $H(x)=$________。

答案：$2, x^2-2$

解析：設 $H(x)=\text{hcf}(g(x), f(x))\Rightarrow$去頭去尾

$H(x)\mid 4f(x)-g(x)\Rightarrow H(x)\mid (4a-1)x^2+(2a^2-8)x-14$

$H(x)\mid -f(x)+2g(x)\Rightarrow H(x)\mid x[7x^2+(2-a)x+(2-4a^2)]$

$\because x\nmid H(x)\Rightarrow H(x)\mid 7x^2+(2-a)x+(2-4a^2)$

$\therefore \frac{4a-1}{7}=\frac{2a^2-8}{2-a}=\frac{-14}{2-4a^2}$，$\therefore a=2$或$-\frac{3}{2}$(不合)；$H(x)=x^2-2$