

範圍	3-2	班級		姓名	
	餘式、因式定理(2)	座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1. () 求 $[x^{100} + 7x^{25} - x^2 + 1] \div (x + 1)$ 之餘式 (A) 6. (B) -6. (C) -4. (D) -5. (E) 8.

【解答】 B

【詳解】

$$x = -1 \text{ 代入餘式} = (-1)^{100} + 7(-1)^{25} - (-1)^2 + 1 = 1 - 7 - 1 + 1 = -6.$$

二、填充題(每題 10 分)

1. 若三次多項式 $g(x)$ 的 $g(-1) = g(0) = g(2) = 0, g(3) = -72$, 試問

(1) $g(x) =$ _____ . (不必展開)

(2) 若多項式 $h(x) = x^4 - x^2 + 1$, 則 $3g(x) + 4h(x)$ 被 $x - 3$ 除的餘式為 _____ .

【解答】 (1) $-6x(x+1)(x-2)$. (2) 76.

【詳解】

(1) 由 $g(-1) = g(0) = g(2) = 0, \deg g(x) = 3$,

$$\text{設 } g(x) = ax(x+1)(x-2)$$

$$\text{又 } g(3) = 12a = -72 \Rightarrow a = -6, \text{ 故 } g(x) = -6x(x+1)(x-2).$$

(2) 令 $F(x) = 3g(x) + 4h(x)$, 則所求餘式為 $F(3) = 3g(3) + 4h(3) = -216 + 292 = 76$.

2. 設 $f(x)$ 為實係數多項式, 以 $x - 1$ 除之, 餘式為 9, 以 $x - 3$ 除之, 餘式為 13, 試求 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 3)$ 的餘式 _____ .

【解答】 $2x + 7$

【詳解】

已知 $f(1) = 9, f(3) = 13$, 設 $f(x) = (x - 1)(x - 3)Q(x) + (ax + b)$

$$\begin{cases} f(1) = a + b = 9 \\ f(3) = 3a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}, \therefore \text{餘式為 } 2x + 7.$$

3. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x - 1, x^2 - 2x + 3$ 之餘式依次為 $2, 3x + 3$, 試求 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$ 的餘式 _____ .

【解答】 $-2x^2 + 7x - 3$

【詳解】

$$\text{設 } f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3)h(x) + a(x^2 - 2x + 3) + 3x + 3$$

$$\text{且 } f(1) = 2a + 6 = 2 \Rightarrow a = -2 \therefore \text{餘式為 } -2x^2 + 7x - 3.$$

4. 已知多項式 $g(x) = x^2 + 9x + 20$ 是多項式 $f(x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 + ax + 120$ 的因式, 試求 a 之值 _____ .

【解答】 -46.

【詳解】

$$x^2 + 9x + 20 \mid x^4 + 4x^3 - 19x^2 + ax + 120$$

$$\begin{array}{r}
1-5+6 \\
1+9+20 \overline{)1+4-19+a+120} \\
1+9+20 \\
\hline
-5-39+a+120 \\
-5-45-100 \\
\hline
6+(a+100)+120 \\
6+54+120 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\therefore a + 100 - 54 = 0 \Rightarrow a = -46.$$

5. 以 $x+1$ 除以 $f(x) = ax^2 - x - 4$ 得餘數 3, 試求以 $x-2$ 除 $f(x)$ 之餘式_____。

【解答】 18.

【詳解】

$$x = -1 \text{ 代入 } f(x) \Rightarrow a + 1 - 4 = 3 \Rightarrow a = 6,$$

$$x = 2 \text{ 代入 } f(x) = 6x^2 - x - 4$$

$$\text{得 } f(2) = 24 - 2 - 4 = 18, \therefore f(x) \text{ 除以 } x-2 \text{ 之餘式爲 } 18.$$

6. 設 $f(x) = x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 30x + 20$, 求 $f(-7) =$ _____。

【解答】 6.

【詳解】

$$\begin{array}{r}
1 \quad +6 \quad -4 \quad +25 \quad +30 \quad +20 \\
-7 \quad +7 \quad -21 \quad -28 \quad -14 \\
\hline
1 \quad -1 \quad +3 \quad +4 \quad +2 \quad +6
\end{array} \quad -7$$

$$\therefore f(-7) = 6.$$

7. 若 $x^2 - x - 2$ 爲 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 10$ 之因式, 求數對 $(a, b) =$ _____.

【解答】 $(-10, -1)$.

【詳解】

$$\text{因 } x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \quad \therefore x+1, x-2 \text{ 均爲其因式,}$$

$$\therefore (-1)^4 + 2(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 10 = 0 \Rightarrow a - b = -9,$$

$$2^4 + 2 \times 2^3 + a \times 2^2 + b \times 2 + 10 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -42, \text{解得 } a = -10, b = -1.$$

8. 用 $x-1$ 除 $(x-2)^{2008} + 2008$ 所得的餘式爲_____.

【解答】 2009.

【詳解】

$$\text{令 } f(x) = (x-2)^{2008} + 2008$$

$$\text{由餘式定理知 } \Rightarrow \text{餘式 } r = f(1) = (1-2)^{2008} + 2008 = 2009.$$

9. 設 k 爲負整數, 若 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + kx - 3$ 有整係數一次因式, 試求 k 值 = _____。

【解答】 -5.

【詳解】

$$\text{設 } f(x) \text{ 的整係數一次因式爲 } ax - b,$$

$$\text{又 } a \mid 1, b \mid -3, \text{ 故 } ax - b \text{ 可能爲 } x \pm 1, x \pm 3$$

$$(1) x+1 \mid f(x) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ (不合).}$$

- (2) $x-1 \mid f(x) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow k = 3$ (不合).
 (3) $x+3 \mid f(x) \Rightarrow f(-3) = 0 \Rightarrow k = 59$ (不合).
 (4) $x-3 \mid f(x) \Rightarrow f(3) = 0 \Rightarrow k = -5$.
 故 $k = -5$.

10. 求 $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 之整係數一次因式_____。

【解答】 $2x+1, 3x-2$.

【詳解】

- (1) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
 $\Rightarrow f(1) = 6 + 5 + 3 - 3 - 2 = 9, f(-1) = 6 - 5 + 3 + 3 - 2 = 5,$
 $\Rightarrow f(x)$ 無 $x-1, x+1$ 之因式.
 (2) 若 $ax-b$ 為 $f(x)$ 之因式, $a, b \in \mathbf{Z}, (a, b) = 1 \Rightarrow a \mid 6, b \mid 2$
 \Rightarrow 因式可能為 $x \pm 1, 2x \pm 1, 3x \pm 1, 3x \pm 2, 6x \pm 1$
 用綜合除法檢驗得 $f(-\frac{1}{2}) = 0, f(\frac{2}{3}) = 0$
 $\Rightarrow f(x) = (2x+1)(3x-2)(x^2+x+1) \Rightarrow$ 一次因式為 $2x+1, 3x-2$.

11. 設 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + ax + 3$ 其中的一個因式為 $x-3$, 求 a 之值 = _____。

【解答】 -22 .

【詳解】

$$f(3) = 81 - 54 + 36 + 3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -22.$$

12. 設 $\deg f(x) \geq 2$, 多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 得餘式 12, 除以 $x+3$ 得餘式 -13 , 求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x+3)$ 之餘式_____。

【解答】 $5x+2$.

【詳解】

$$f(x) = (x-2)g_1(x) + 12 = (x+3)g_2(x) + (-13)$$

$$\Rightarrow \text{設 } f(x) = (x-2)(x+3)g(x) + \underline{a(x-2)+12},$$

↓
餘式

$$\because f(-3) = -13 \Rightarrow a(-3-2) + 12 = -13 \Rightarrow -5a = -25, \text{ 故 } a = 5.$$

$$\therefore \text{ 所求餘式為 } 5(x-2) + 12 = 5x + 2.$$

13. 設三次多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 餘 $3x-4$; 除以 x^2+1 餘 $x-6$, 則 $f(x) =$ _____。

【解答】 $x^3 + x^2 + 2x - 5$.

【詳解】

$$\text{由題意令 } f(x) = (x^2+1)(ax+b) + (x-6),$$

$$\text{又 } f(1) = -1, f(-1) = -7,$$

$$\therefore 2(a+b) + 1 - 6 = -1,$$

$$2(-a+b) - 1 - 6 = -7, \Rightarrow a = 1, b = 1,$$

$$\text{故 } f(x) = (x^2+1)(x+1) + (x-6) = x^3 + x^2 + 2x - 5.$$

14. 求 x^{12} 除以 x^2+x+1 之餘式_____。

【解答】 1.

【詳解】


$$x^{12} = (x^{12}-1) + 1 = (x^6-1)(x^6+1) + 1 = (x^3-1)(x^3+1)(x^6+1) + 1$$

$$= (x^2+x+1)(x-1)(x^3+1)(x^6+1) + 1, \text{ 故餘式為 } 1.$$

15. 設 $ax^3 + bx^2 - 47x - 15$ 能析出 $3x + 1$ 與 $2x - 3$ 之因式, 試求 a, b 之值_____ , 及第三個因式為_____ .

【解答】 $a = 24, b = 2$, 第三個因式為 $4x + 5$.

【詳解】

$$\text{設 } ax^3 + bx^2 - 47x - 15 = (3x + 1)(2x - 3)(cx + d)$$


用觀察法得 $d = 5$

$$\Rightarrow (3x + 1)(2x - 3)(cx + 5)$$

$$= (6x^2 - 7x - 3)(cx + 5)$$

$$= (6c)x^3 + (30 - 7c)x^2 + (-3c - 35)x - 15.$$

$$\therefore 6c = a, b = 30 - 7c, -47 = -3c - 35$$

$$\Rightarrow c = 4, a = 24, b = 2$$

\therefore 另外的因式為 $4x + 5$.