高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：96.11.21
範圍	2-4 數學歸納法(2)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題（每題 10 分）

1、(A) 請計算出$11^3+12^3+\cdots+20^3$之值為

(A)41075 (B)41095 (C)41115 (D)41135 (E)41155

解析：$11^3+12^3+\cdots\cdots+20^3=[1^3+2^3+\cdots\cdots+20^3]-[1^3+2^3+\cdots\cdots+10^3]$

$$=(\frac{20\times21}{2})^2-(\frac{10\times11}{2})^2$$

$$=210^2-55^2$$

$$=44100-3025=41075$$

二、填充題（每題 10 分）

1、有一數列依照規則排列如下 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, $\cdots,\underbrace{n,\ n,\cdots,\ n\cdots}_{(n+1\text{個})}$ 則

(1)$a_{160}=$ ______，(2)前 160 項之和 $S_{160}=$ ______。

答案：17, 1768

解析：

$$[2+3+\cdots+(\ell+1)]<160\Rightarrow\frac{\ell(\ell+3)}{2}<160\Rightarrow\ell(\ell+3)<320$$ ，則 $\ell=16$，

$2+3+\cdots+17=\frac{16\times19}{2}=152$，則 $a_{160}=17$

$$S_{160}=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+16\times17+17\times8$$

$$=\sum_{k=1}^{16}k\left(k+1\right)+17\times8=\frac{1}{3}\times16\times17\times18+136=1768$$

三、證明題（每題 10 分）

1、 試證自然數列的首 n 項和為$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 。

證明：

(1)在$n=1$時，左式$=1$，右式$=\frac{1\cdot2}{2}=1$。故成立。

(2)設$n=k$時，$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$，原式成立。

當$n=k+1$時，$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ，也成立。

根據數學歸納法，對一切自然數 n， $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$都成立。

2、 設$n\in\mathbb{N}$，且$n\geq 3$，試證$5^n>3^n+4^n$。

證明：

(1)當$n=3$時，左式$=5^3=125$，

右式$=3^3+4^3=27+64=91$， 所以$5^3>3^3+4^3$成立。

(2)設$n=k$時成立，$5^k>3^k+4^k$。

當$n=k+1$時，$5^{k+1}=5\cdot 5^k$

$>5\cdot(3^k+4^k)$

$=5\cdot 3^k+5\cdot 4^k$

$>3\cdot 3^k+4\cdot 4^k$

$=3^{k+1}+4^{k+1}$

故$n=k+1$時也成立。

∴根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N}$且$n\geq 3$原式恆成立。

3、 設$n\in\mathbb{N}$，試證$10^{n+1}-9n-10$恆爲 81 之倍數。

證明：

(1)當$n=1$時，$10^2-9-10=81=81\times 1$爲 81 之倍數，∴成立。

(2)設$n=k$時成立，$10^{k+1}-9k-10=81m\ (m\in\mathbb{N})$

當$n=k+1$時，$10^{k+1+1}-9(k+1)-10=10^{k+2}-9k-19$

$=10\times 10^{k+1}-9k-19$

$=10\cdot(10^{k+1}-9k-10)+81k+81$

$=10\cdot 81m+81k+81$

$=81(10m+k+1)$爲 81 之倍數，∴成立。

∴根據數學歸納法，$\forall n\in\mathbb{N}$，原式恆成立。

4、 設p爲一正質數，$n\in\mathbb{N}, f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$

(1)$\forall n\in\mathbb{N}$，使得$p\mid f(n)$，則$p=$________。(2)試證明你的推論是正確的。

證明：

(1)當$n=1$時，$p\mid f(1)=35=5\times 7$

當$n=2$時，$p\mid f(2)=259=7\times 37$，則質數$p=7$。

(2)①當$n=1$時，$f(1)=35$爲 7 的倍數

②設$n=k$時成立，$f(k)=3^{2k+1}+2^{k+2}=7m, m\in\mathbb{N}$

當$n=k+1$時，左式$=f(k+1)=3^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}$

$=3^{2k+3}+2^{k+3}$

$=3^{2k+1}\cdot 3^2+2^{k+2}\cdot 2^1$

$=2(3^{2k+1}+2^{k+2})+7\cdot 3^{2k+1}$

$=9\times 7m+7\cdot 3^{2k+1}$

$=7(9m+3^{2k+1})$爲 7 的倍數，故成立。

∴根據數學歸納原理，$\forall n\in\mathbb{N}, 7\mid f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$。

5、 試證$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\forall n\in\mathbb{N}$。

$\boxed{\text{證明}}$：

(1)當$n=1$時，左式$=1^2=1$，右式$=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$，原式成立。

(2)設$n=k$時成立：$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$。

當$n=k+1$時，
$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
&=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}\\
&=\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6}\\
&=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}\text{，成立。}
\end{aligned}
$$

根據數學歸納原理，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\forall n\in\mathbb{N}$。

6、設a為一個大於-1的定實數，證明對於所有自然數n，$(1+a)^n\ge1+na$恒成立。

$\boxed{\text{證明}}$：

(1) $a>-1,\ n=1$時$(1+a)^1=1+1\cdot a$成立，

(2)設$n=k$時成立$(1+a)^k\ge1+ka$

當$n=k+1$時
$$
\begin{aligned}
(1+a)^{k+1}&=(1+a)(1+a)^k\\
&\ge(1+a)(1+ka)\\
&=1+ka+a+ka^2\\
&=1+(k+1)a+ka^2\ge1+(k+1)a\text{ 成立}
\end{aligned}
$$

$\therefore$根據數學歸納原理，$\forall n\in\mathbb{N}$，$(1+a)^n\ge1+na$成立