高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：96.11.14
範圍	2-2 無窮級數	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題（每題 10 分）

1、(BE) 下列各無窮級數中，何者為收斂？

(A) $\sum_{k=1}^{\infty}(1.5)^k$ (B) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{7})^{k-1}$ (C) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{4^k}$ (D) $\sum_{k=1}^{\infty}3$ (E) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{6^k}$

解析：無窮等比級數收斂之條件為 $-1<$ 公比 <1， $\frac{\pi}{7}\doteqdot 0.45<1$

二、填充題（每題 10 分）

1、 設 $a,b\in\mathbb{R}$，若 $\frac{a}{2}+\frac{b}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\frac{b}{2^4}+\cdots+\frac{a}{2^{2n-1}}+\frac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$，求 $2a+b=$______。

答案：9

解析：原式 $\Rightarrow a(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots)+b(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots)=3$

$$\therefore a(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}})+(\frac{\frac{b}{4}}{1-\frac{1}{4}})=3\Rightarrow \frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b=3\Rightarrow 2a+b=9$$ 。

2、 設某一無窮等比級數之和為 24，其各項之平方和為 96，則此級數之首項為______，公比為______。

答案：$\frac{48}{7};\frac{5}{7}$

解析：設首項為 a，公比為 r $\Rightarrow \begin{cases}\frac{a}{1-r}=24\cdots\cdots①\\ \frac{a^2}{1-r^2}=96\cdots\cdots②\end{cases}$，

由 $\frac{②}{①}$ 得 $\frac{a}{1+r}=\frac{96}{24}=4\cdots\cdots③$

由 $\frac{③}{①}$ 得 $\frac{1-r}{1+r}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，

$6-6r=1+r$， $r=\frac{5}{7}$，代入①得 $a=24\times\frac{2}{7}=\frac{48}{7}$ 。

3、 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{5^{n-1}}=$______。(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{5^{n-1}}=$______。

答案：(1)0 (2) $\frac{55}{6}$

$\boxed{解析}$：(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{2}{5})^{n-1}\cdot 2^2+(\frac{3}{5})^{n-1}}{1}=\dfrac{0\cdot 2^2+0}{1}=0$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}}{5^{n-1}}=(\dfrac{2^2}{5^0}+\dfrac{2^3}{5^1}+\dfrac{2^4}{5^2}+\ldots\ldots)+(\dfrac{3^0}{5^0}+\dfrac{3^1}{5^1}+\dfrac{3^2}{5^2}+\ldots\ldots)=\dfrac{4}{1-\frac{2}{5}}+\dfrac{1}{1-\frac{3}{5}}=\dfrac{55}{6}$

4、 (1)求$1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{125}+\cdots=$______。 (2)求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+2}{5^n}=$______。

$\boxed{答案}$：(1)$\dfrac{5}{6}$ (2)2

$\boxed{解析}$：(1)原式$=\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{5})}=\dfrac{5}{6}$。

(2)原式$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{5^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{5^n}=\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}}=2$。

5、 求無窮等比級數之和

(1)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5\times(-2)^k}{7\times 3^{k+2}}=$______。(2)$(\sqrt{2}-1)+(5\sqrt{2}-7)+(29\sqrt{2}-41)+\cdots=$______。

$\boxed{答案}$：(1)$-\dfrac{2}{63}$ (2)$\dfrac{1}{2}$

$\boxed{解析}$：(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5\times(-2)^k}{7\times 3^{k+2}}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5\times(-2)^k}{7\times 3^k\cdot 3^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5}{63}\times(\dfrac{-2}{3})^k=\dfrac{\frac{5}{63}\times(\frac{-2}{3})}{1-(-\frac{2}{3})}=-\dfrac{2}{63}$

(2) $a=\sqrt{2}-1,\ r=\dfrac{5\sqrt{2}-7}{\sqrt{2}-1}=3-2\sqrt{2}<1$，其和$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{2}$

6、 設$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{-2x}{3(x+1)}$，則$x=$_______。

$\boxed{答案}$：$-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{解析}$：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ 收斂$\Leftrightarrow -1<$公比$=x<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots.=\dfrac{-2x}{3(x+1)}\Rightarrow\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-2x}{3(x+1)}\Rightarrow 2x^2-5x-3=0$，

$\therefore (2x+1)(x-3)=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$或 3（不合）。

7、 求 $0.7+0.077+0.00777+\cdots$之和為______。

答案：$\dfrac{7}{891}$

解析：$0.7+0.077+0.00777+\cdots=7(0.1+0.011+0.00111+.....)$

$$=\frac{7}{9}\times(0.9+0.099+0.00999+\cdots)$$

$$=\frac{7}{9}[(1-0.1)+(0.1-0.001)+(0.01-0.00001)+\cdots]$$

$$=\frac{7}{9}\left[\frac{1}{1-0.1}-\frac{0.1}{1-0.01}\right]=\frac{7}{9}\times(\frac{1}{9}-\frac{10}{99})=\frac{7}{891}$$

8、 試求無窮級數$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$之和爲______。

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：$S=\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+.....$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+............)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\infty})=\frac{1}{2}$$

9、設無窮等比級數$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{100}+\cdots$的和爲 S，前 n 項之和爲 S_n

(1)試求此級數之和 $S=$______。

(2)試求此等比級數前 n 項之和 $S_n=$______。

(3)若$\left|S-S_n\right|<\dfrac{1}{10^5}$，則 n 的最小值爲______。

答案：(1) $\dfrac{5}{16}$　(2) $\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)$　(3) 7

解析：(1) $a=\dfrac{1}{4},\ r=\dfrac{1}{5}$　$\therefore S=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}$

(2) $S_n=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{5})^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{16}(1-(\dfrac{1}{5})^n)$

(3) $\left|S-S_n\right|=\dfrac{5}{16}(\dfrac{1}{5})^n<\dfrac{1}{10^5}$　$\therefore 5^{n-1}>\dfrac{10^5}{16}=\dfrac{5^5\cdot2^5}{2^4}$　$\Rightarrow 5^{n-1}>5^5\times2$　$\therefore n=7$

10、一無窮等比級數之和爲 3，前二項之和爲$\dfrac{8}{3}$，又知首項大於 3，則此級數的首項爲_____，公比爲_____。

答案：$4,\ -\dfrac{1}{3}$

解析：

$$\frac{a}{1-r}=3......①$$

$a+ar=\frac{8}{3}\Rightarrow a(1+r)=\frac{8}{3}$.......②

②÷①　$(1+r)(1-r)=\frac{8}{9}$　　$\therefore r=\pm\frac{1}{3}$

若 $r=\frac{1}{3},a=2$(不合)，若 $r=-\frac{1}{3},a=4$(合)

11、設 $a_n=\frac{3^{n+1}}{(2x-1)^{n-1}}$ 則

(1)數列 $<a_n>$ 收斂時，x 的範圍為＿＿＿＿＿，(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂時，x 的範圍為＿＿＿＿＿＿。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $x\ge 2$ 或 $x<-1$　　　　(2) $x>2$ 或 $x<-1$

$\boxed{\text{解析}}$：(1)數列收斂，$-1<\frac{3}{2x-1}\le 1,\ \Rightarrow\begin{cases}-1<\frac{3}{2x-1}\\ \frac{3}{2x-1}\le 1\end{cases}$

(.) $-1<\frac{3}{2x-1}\Rightarrow 0<\frac{3}{2x-1}+1\Rightarrow 0<\frac{3+2x-1}{2x-1}\Rightarrow 0<\frac{2(x+1)}{2x-1}$

$\Rightarrow 0<2(x+1)(2x-1)\Rightarrow x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-1$........①

(..) $\frac{3}{2x-1}\le 1\Rightarrow\frac{3}{2x-1}-1\le 0\Rightarrow\frac{3-(2x-1)}{2x-1}\le 0\Rightarrow\frac{2(x-2)}{2x-1}\ge 0$

$\Rightarrow 2(x-2)(2x-1)\ge 0$ 且 $2x-1\ne 0\Rightarrow x\ge 2$ 或 $x<\frac{1}{2}$........②

由①②$\Rightarrow x\ge 2$或$x<-1$

(2)級數收斂之條件為 $-1<\frac{3}{2x-1}<1\Rightarrow x>2$或$x<-1$

12、$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k-1}{7^k}=$＿＿＿＿。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{5}{12}$

$\boxed{\text{解析}}$：　設

$$S_n=2(\frac{1}{7})+5(\frac{1}{49})+8(\frac{1}{243})+\cdots+(3n-1)\frac{1}{7^n}+......$$

$$-)\frac{1}{7}S_n=\qquad 2(\frac{1}{49})+5(\frac{1}{243})+8(\frac{1}{729})+\cdots\cdots+(3n-1)\frac{1}{7^{n+1}}+.........$$

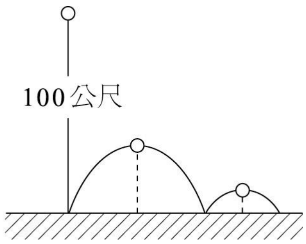
$$\frac{6}{7}S_n=2(\frac{1}{7})+3(\frac{1}{49})+3(\frac{1}{243})+3(\frac{1}{729})+\cdots\cdots\cdots$$

$$S=\frac{7}{6}\left[\frac{2}{7}+\frac{\frac{3}{49}}{1-\frac{1}{7}}\right]=\frac{5}{12}$$

13、一皮球從 100 公尺的高處落下，每次返跳的高度爲其落下時高度的$\frac{1}{3}$倍，則至靜止時，此球所經的距離爲______公尺。

$\boxed{答案}$：200

$\boxed{解析}$：經過距離$100+2[100\times\frac{1}{3}+100\times(\frac{1}{3})^2+\cdots]=100+2\times\dfrac{\frac{100}{3}}{1-\frac{1}{3}}=100+100=200$（公尺）。



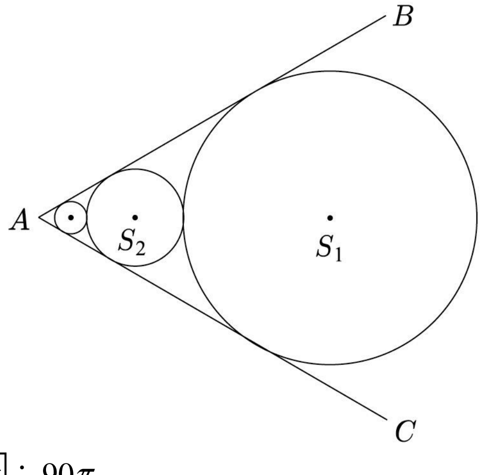
14、$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=$______。

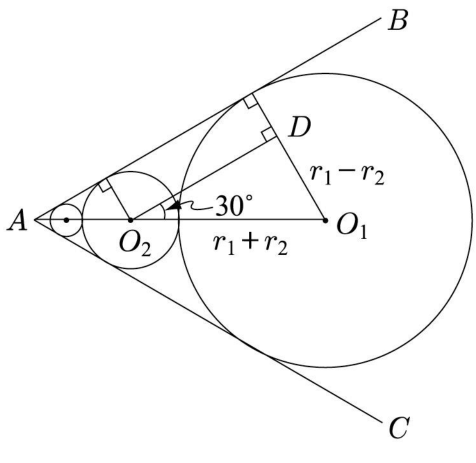
$\boxed{答案}$：$\sqrt{n+1}-1$

$\boxed{解析}$：$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

$$\therefore\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=2}^{n+1}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

15、如圖，$\angle BAC=60^\circ$，設最大圓爲 S_1，若有無窮多個圓 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n,\cdots$彼此相切且與$\angle BAC$的兩邊$\overline{AB}$，$\overline{AC}$相切，若 S_1的面積爲80π，則此無窮多個圓面積和爲______。





$\boxed{答案}$：90π

$\boxed{解析}$：右上圖，$\triangle O_1O_2D$中，$\overline{O_1O_2}=2\overline{O_1D}\Rightarrow\therefore r_1+r_2=2(r_1-r_2)\Rightarrow\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow$面積比$=(\frac{r_2}{r_1})^2=\frac{1}{9}$

$\therefore$面積和爲$S_1+S_2+\cdots=\dfrac{80\pi}{1-\frac{1}{9}}=90\pi$。