高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.10.31					
範圍	2-1 等差、等比(2)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(CE)(複選) 有一個 101 項的等差數列$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}$，其和為 0 且$a_{71}=71$，試問下列選項那些為正確？ (A)$a_1+a_{101}>0$ (B)$a_2+a_{100}<0$ (C)$a_3+a_{99}=0$ (D)$a_{51}=51$ (E)$a_1<0$

$\boxed{\text{解析}}$：(A)（╳）：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$

$\because S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$\therefore S_{101}=\dfrac{101}{2}(2a_1+100d)=0 \Rightarrow 2a_1+100d=0 \Rightarrow a_1+50d=0 \Rightarrow a_{51}=0$

$a_1+a_{101}=a_1+(a_1+100d)=2a_1+100d=0$。

(B)（╳）：$a_2+a_{100}=(a_1+d)+(a_1+99d)=2a_1+100d=0$。

(C)（○）：$a_3+a_{99}=(a_1+2d)+(a_1+98d)=2a_1+100d=0$。

(D)（╳）：$a_{51}=a_1+50d=0$。

(E)（○）：$\because a_{71}=a_1+70d=71\cdots\cdots$①

又$a_1+50d=0\cdots\cdots$②

①$-$②$\times\dfrac{7}{5}$， $-\dfrac{2}{5}a_1=71$，$\therefore a_1<0$。

二、填充題 (每題 10 分)

1、 $1, a, b, 15$ 四正數中，前三數成等比，後三數成等差，則數對 $(a, b)=$______或______。

$\boxed{\text{答案}}$：(3, 9)

$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{cases} a^2=b \\ 2b=a+15 \end{cases}$ $\therefore a^2=\dfrac{a}{2}+\dfrac{15}{2}$

$(2a+5)(a-3)=0$ $\therefore a=-\dfrac{5}{2},\ 3$ ，又$a>0$，故$b=9$，即$(a, b)=(3, 9)$。

2、 一等比數列$\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$求其第 20 項為______，又加到第 20 項的總和為______。

$\boxed{\text{答案}}$：$(\frac{1}{2})^{22},\ \frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^{22}$

$\boxed{\text{解析}}$：$a_{20}=\dfrac{1}{8}\times(\dfrac{1}{2})^{19}=2^{-22}=(\dfrac{1}{2})^{22}$

$$S_{20}=\frac{\frac{1}{8}[1-(\frac{1}{2})^{20}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^{20}]=2^{-2}-2^{-22}=(\frac{1}{4})-(\frac{1}{2})^{22}$$

5、 一等差數列為 47, 44, 41,$\cdots$，求其第 20 項為______，又加到第 20 項的總和為______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-10,\ 370$

$\boxed{解析}$：$a=47,\ d=-3,\ \therefore a_{20}=47+19\times(-3)=-10,$

$S_{20}=\dfrac{20}{2}[47\times2+19\times(-3)]=370$

3、 一等差數列共 33 項，前 3 項之和爲 69，後 3 項之和爲 204，
(1)求 $a_{32}=$______，(2)求首項 $=$______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{43}{2},\ \dfrac{3}{2}$

$\boxed{解析}$：$a_{31}+a_{32}+a_{33}=204\Rightarrow 2a_{32}=a_{31}+a_{33},\ \therefore a_{32}=68=a+31d$

同理 $a_1+a_2+a_3=69\Rightarrow a_2=23=a+d$ ，$\therefore d=\dfrac{3}{2},\ \therefore a_1=21.5=\dfrac{43}{2}$

4、 一等差數列第四項是 25，第十項是 61，求第十五項爲______。

$\boxed{答案}$：91

$\boxed{解析}$：$a_4=a_1+3d=25\cdots\cdots$①

$a_{10}=a_1+9d=61\cdots\cdots$②

②−①　　$6d=36$，$\therefore d=6$，代入 ①

$a_1=25-3\times6=7$

$a_{15}=a_1+14d=7+14\times6=7+84=91$。

5、 將正奇數由小而大依下列方式分組 (1), (3), (5,7), (9,11), (13,15,17), (19,21,23),$\cdots$，已知第 3 組中的第一個數爲 5，則(1)第 21 組中的第一個數爲__________，(2)第 21 組內所有數的和爲______。

$\boxed{答案}$：(1)221

(2)2541

$\boxed{解析}$：第 21 組中共有 11 個奇數，由第 1 組到第 20 組共有 $2(1+2+\cdots+10)=110$ 個數，故第 21 組中的第一個數爲第 111 個奇數 $=\ 2\times111-1=221$，

第 21 組中的所有數之和$=\dfrac{11\times[221\times2+(11-1)\times2]}{2}=2541$

6、 設 a,b,c,d 四正數成等比數列，若 $a+b=8$, $c+d=72$ ，則公比爲________________。

$\boxed{答案}$：3

$\boxed{解析}$：設公比爲 r　　$\begin{cases}a+b=8\\c+d=72\end{cases}\Rightarrow\therefore\begin{cases}a+ar=8\\ar^2+ar^3=72\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(1+r)=8\cdots\cdots①\\ar^2(1+r)=72\cdots\cdots②\end{cases}$

$\dfrac{②}{①}$　　$r^2=\dfrac{72}{8}=9$ ，又四數爲正數，$\therefore r=3$。

7、 一等差數列，加到第 n 項之和 $S_n=n^2+3n$ ，則 $a_{10}=$_______，又公差 $=$______。

$\boxed{答案}$：22, 2

$\boxed{解析}$：$\because S_n=n^2+3n,\ \therefore a_1=S_1=4$

$a_{10}=S_{10}-S_9=130-108=22$

$a_2 = S_2 - S_1 = 10 - 4 = 6,\ \therefore d = 2$

8、有兩個等差數列 $\langle a_n \rangle = \langle 0,\ 7,\ 14,\ 21, \cdots,\ 994 \rangle$，$\langle b_n \rangle = \langle 1,\ 5,\ 9,\ 13, \cdots,\ 1001 \rangle$ 由這兩個數列中取出全部共同項，由小而大依序排列，得另一數列 $\langle c_n \rangle$ 共有 k 項，則求(1) $\langle c_n \rangle$ 之公差爲__________，(2) $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ 之和 $=$ __________。

答案：(1)28　　(2)17395

解析：$\langle a_n \rangle = \langle 0,\ 7,\ 14,\ 21, \cdots, 973, 980, 987, 994 \rangle$,

$\langle b_n \rangle = \langle 1,\ 5,\ 9,\ 13, 17, 21, \cdots, 973, 977, 981, 985, 989, 993, 997, 1001 \rangle$

$\therefore c_1 = 21$

$\langle c_n \rangle$ 的公差爲 $[4,7]=28 \Rightarrow c_k = 21 + (k-1) \times 28$，

末項爲 $c_k = 21 + (k-1) \times 28 = 97 \Rightarrow k = 35$，和 $= \dfrac{35(42 + 34 \times 28)}{2} = 17395$

9、一等比數列，首項爲 3，末項爲 192，和爲 $381 + 189\sqrt{2}$，則其公比爲______。

答案：$\sqrt{2}$

解析：$a = 3,\ a_n = 192$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{r \cdot a_n - a}{r-1} \Rightarrow 381 + 189\sqrt{2} = \frac{192r - 3}{r-1},\ \therefore r = \sqrt{2}$$

10、在數列 $\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}, \cdots$,中(1) $\frac{3}{7}$ 爲第______項，(2)第 126 項是______(不可約分)。

答案：(1)24　　(2) $\frac{6}{16}$

解析：$(\frac{1}{1}),\ (\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}),\ (\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}),\ (\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}), \cdots$

(1) $(1+2+3+4+5+6)+3 = 24$

(2) $1 + 2 + \cdots + k \le 126,\ \dfrac{k(k+1)}{2} < 126 \Rightarrow k(k+1) < 252$，

k 之最大爲 15, $1 + 2 + \cdots + 15 = 120$，$\therefore$第 126 項爲 $\dfrac{6}{16}$(不可約分)。

11、等差數列，首項爲 130，公差 -6

(1)第 n 項起始爲負數，則 $n =$______。

(2)加到第 n 項之和爲負數，則 n 之最小值爲______。

答案：(1)23　　(2)45

解析：(1) $a = 130,\ d = -6,\ a_n = 130 + (n-1)(-6) < 0$

$$6(n-1) > 130,\ n-1 > \frac{130}{6},\ n > \frac{136}{6} = 22\frac{2}{3} \quad \therefore n = 23$$

(2) $S_n = \dfrac{n[260 + (n-1)(-6)]}{2} < 0 \quad \therefore 260 + (n-1)(-6) < 0$

$$\therefore 6(n-1) > 260, \therefore n > \frac{130}{3} + 1 = 44\frac{1}{3}, \therefore n = 45$$

12、試求$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$與$\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$之等差中項=＿＿＿＿＿＿。等比中項=＿＿＿＿＿＿；。

答案：4；±1

解析：

等差中項爲 $(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}})\div 2$

$=[\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}]\div 2$

$=[\dfrac{8-2\sqrt{15}}{5-3}+\dfrac{8+2\sqrt{15}}{5-3}]\div 2=4$

等比中項爲 $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}=\pm 1$

13、在 23 和 83 之間插入 9 個數，使這 11 個數成等差數列，求插入的第 4 個數=＿＿＿＿＿。

答案：47

解析：公差爲$d=\dfrac{83-23}{11-1}=6\Rightarrow 23$ 開始逐次加 6，插入的第 4 個數爲 23, 29,35, 41, 47, ….

14、Selina 向銀行借 120 萬元，打算分 60 期償還，每月爲一期，每期複利計算，月利率爲 1%，銀行爲方便客戶，此貸款自次期初起分 60 期平均償還，問每期應償還多少百元？(百元以下四捨五入) $(1.01)^{59}=1.798$, $(1.01)^{60}=1.816$

答案：267 百元

解析：$120\times(1+1\%)^{60}=217.92$ (萬元)

$x(1+1\%)^{59}+x(1+1\%)^{58}+\cdots+x=\dfrac{x[(1.01)^{60}-1]}{1.01-1}=81.6x$ (萬元)

$\therefore 81.6x=217.92$ $\therefore x=2.67058$ (萬元) ∴每月應償 267 百元。

15、德龍參加臺灣銀行零存整付的存款，其辦法規定，每三個月爲一期，每一期的第一天存款 10000 元，按年利率 12%計算，每三個月複利一次，五年期滿，問期滿時共可領回多少元？(不足一元者四捨五入) $(1.03)^{20}=1.806$, $(1.03)^{19}=1.753$

答案：276727

解析：$10000\times(1+3\%)^{20}+10000\times(1+3\%)^{19}+\cdots+10000\times(1+3\%)^{1}$

$=\dfrac{10000\times 1.03\times[(1.03)^{20}-1]}{1.03-1}=276727$ (元)

16、試求 300 到 900 之間所有 8 的倍數之和。

答案：45000

解析：

由$300=8\times37+4$，知首項爲$300+4=304$； $(304=8\times38)$
由$900=8\times112+4$，知末項爲$900-4=896$； $(896=8\times112)$
項數爲$112-38+1=75$，所求之和爲$\dfrac{75\times(304+896)}{2}=45000$