高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：96.10.11
範圍	1-4 複數	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 下列何者錯誤？

(A) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{-6}$ (B) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

(D) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (E) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$

解析：

$\because \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}i}=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ ；$\sqrt{\dfrac{2}{-3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ 並不相等

2、(A) 設 $1-i$ 為 $x^2+ax+3-i=0$ 的一根，則 a 的值為何？ (A)–3 (B)–2 (C) $-1-i$ (D)2 (E)3

解析：

$1-i$ 代入；$(1-i)^2+a(1-i)+3-i=0$

$-2i+a-ai+3-i=0$

$(a+3)-(a+3)i=0$ ， $a+3=0\,,a=-3$

3、(C) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 則以下何者錯誤？

(A) $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ (B) $1+\omega+\omega^2=0$ (C) $\omega(\omega+1)=1$ (D) $\omega^3=1$ (E) $2\omega+\omega^2=-2-\omega^2$

解析：

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2},\omega^3=1,\quad \therefore 1+\omega+\omega^2=0$

$\because \omega(\omega+1)=\omega^2+\omega=-1$

二、填充題 (每題 10 分)

1、解方程式 $x^2-2x+3=0$ 得其兩根為______。

答案：$1\pm\sqrt{2}i$

解析：

$x^2-2x+3=0$ 之兩根為 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=1\pm\sqrt{2}i$

2、設 $a,b\in\mathbb{R}$ ，若 $\dfrac{-4+3i}{a+bi}=2+i$ ，求數對 $(a,b)=$______。

答案：$(-1,2)$

解析：

$\because \dfrac{-4+3i}{a+bi}=2+i$, $\therefore a+bi=\dfrac{-4+3i}{2+i}=\dfrac{-4+3i}{2+i}\times\dfrac{2-i}{2-i}=\dfrac{(-8+3)+(6+10)i}{2^2+1^2}=-1+2i$ ，。

3、化簡$\frac{13}{3+\sqrt{-4}}+\frac{25}{4-\sqrt{-9}}=$______。

答案：$7+i$

解析：

$$\frac{13}{3+2i}+\frac{25}{4-3i}=\frac{13(3-2i)}{3^2+2^2}+\frac{25(4+3i)}{4^2+3^2}=(3-2i)+(4+3i)=7+i$$

4、已知 i 爲虛數單位，試問(1) $i^{2003}+i^{24}=$______。(2) $(1+i)^{12}=$______。

答案：(1)$1-i$ (2)-64

解析：

(1) $i^{2003}+i^{24}=(i^4)^{500}\cdot i^3+(i^4)^6=-i+1=1-i$ 。

(2) $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=2i$ ，$\therefore (1+i)^{12}=[(1+i)^2]^6=(2i)^6=-64$ 。

5、 $a>0$ 則$\left|\frac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right|=$______。

答案：2

解析：

$$\left|\frac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right|=\frac{2\sqrt{3}\left|2-ai\right|}{\left|\sqrt{2}+i\right|\left|a-2i\right|}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}=2$$

6、求$5-12i$之平方根爲____________________。

答案：$3-2i$或$-3+2i$

解析：

設其平方根爲$a+bi$ ，$a,b\in\mathbb{R}$

$$(a+bi)^2=5-12i\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=5\cdots\cdots①\\2ab=-12\cdots\cdots②\end{cases}$$

由② $b=-\frac{6}{a}$ 代入① $\Rightarrow a^2-(-\frac{6}{a})^2=5\Rightarrow a^4-5a^2-36=0$

$(a^2-9)(a^2+4)=0\Rightarrow a^2=9,-4$ (不合)，解得$a=3,b=-2$或$a=-3,b=2$

即$5-12i$的平方根爲$3-2i$或$-3+2i$ 。

7、設α , β爲方程式$x^2+6x+1=0$的二根，求$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=$______。

答案：$2\sqrt{2}i$

解析：

利用根與係數的關係，$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta=-6\\\alpha\beta=1\end{cases}$ 且$\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,(D>0)$, $\therefore\begin{cases}\alpha<0\\\beta<0\end{cases}$

$\therefore(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-8$

$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$ （ $-2\sqrt{2}i$ 不合），$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}i$ 。

8、設 $x, y \in \mathbb{R}$ ，$(-3+2i)(x+yi)+(2y-6xi)=-3+5i$ ，則 $x=$_____$, y=$_____。

$\boxed{\text{答案}}$：$1,\ -3$

$\boxed{\text{解析}}$：

$(-3+2i)(x+yi)+(2y-6xi)=-3+5i$

$-3x+(-3y-4x)i=-3+5i$ ，$\therefore x=1, y=-3$

9、設 $x, y \in \mathbb{R},\ \ x+y=1,\ xy=-6$ ，則 $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}i$

$\boxed{\text{解析}}$：

$\because x+y=1,\ xy=-6 \quad \therefore x, y$ 異號 且 $x+\dfrac{-6}{x}=1 \Rightarrow x^2-x-6=0; (x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=3,\ y=-2$ 或 $x=-2,\ y=3; \quad \therefore \dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{2i}{\sqrt{6}}-\dfrac{3i}{\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}i=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}i$

10、設 $z \in \mathbb{C}, z \cdot (1+i)^{26}=(1-i)^{20}$ ，則 $z=$_____。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{1}{8}i$

$\boxed{\text{解析}}$：

$(1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i,\ z\cdot(2i)^{13}=(-2i)^{10}$ ，$z=\dfrac{1}{2^3 i^3} \quad \therefore z=+\dfrac{1}{8}i$

11、z 的虛部爲 2，且 $\dfrac{1}{z}$ 之實部爲 $\dfrac{3}{13}$ 則 z 爲_______或_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$3+2i,\ \dfrac{4}{3}+2i$

$\boxed{\text{解析}}$：

設 $z=a+2i \quad \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+2i}=\dfrac{a-2i}{a^2+4}=\dfrac{a}{a^2+4}+\dfrac{-2}{a^2+4}i$

$\therefore \dfrac{a}{a^2+4}=\dfrac{3}{13} \Rightarrow 3a^2-13a+12=0; \quad (3a-4)(a-3)=0 \quad \therefore a=3$ 或 $\dfrac{4}{3}$

$\therefore z=3+2i$ 或 $\dfrac{4}{3}+2i$

12、設 $a \in \mathbb{R}$ ，若方程式 $x^2+(3a+2-i)x+(2a-i)=0$ 有實根，試求 $a=$_______，另一虛根爲________。

$\boxed{\text{答案}}$：-1 ； $2+i$

$\boxed{\text{解析}}$：

設實根爲 α ，另一虛根爲 β

α 代入 $\quad \alpha^2+(3a+2-i)\alpha+(2a-i)=0$

$(\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a)-(\alpha+1)i=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a=0 \cdots\cdots ① \\ \alpha+1=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由② $\alpha=-1$ 代入① $1-3a-2+2a=0 \Rightarrow a=-1$

又 $\alpha+\beta=-(3a+2-i) \Rightarrow -1+\beta=1+i \Rightarrow \beta=2+i$，$\therefore a=-1$，另一虛根為 $2+i$。

13、(1)設 z 為複數且 $z^2=-8-6i$，則 $z=$？

(2)求 $x^2-(4+2i)x+(11+10i)=0$ 之二根為何？

答案：(1) $1-3i,\ \ -1+3i$ (2) $3-2i$ 或 $1+4i$

解析：

(1)設 $z=a+bi, z^2=-8-6i$

$\therefore \begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ 2ab=-6 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(1,-3)$或$(-1,3)$，即 $z=\pm(1-3i)$

(2) $x^2-(4+2i)x+(11+10i)=0$ 之二根 $x=\dfrac{(4+2i)+[(4+2i)^2-4(11+10i)]\text{的平方根}}{2}$

$(4+2i)^2-4(11+10i)=-32-24i$

$(-32-24i)=4(-8-6i)$ 的平方根為 $\pm 2(1-3i)$

$\therefore x=\dfrac{(4+2i)\pm(2-6i)}{2} \Rightarrow \quad x=3-2i$ 或 $1+4i$