高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：96.09.26					
範圍	1-1 整數(3)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(E) 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{11}{n}$ 為整數？

(A)4 個 (B)5 個 (C)6 個 (D)7 個 (E)8 個

解析： $\frac{1+2+\cdots+11}{n}=\frac{66}{n}\Rightarrow n\in$ 正整數且 $n\,|\,66$，則 $n=1,2,3,6,11,22,33,66$。

2、(A) 試問整數 43659 的質因數和？(A)21 (B)22 (C)23 (D)24 (E)25

解析：$\Rightarrow 43659=3^4\cdot 7^2\cdot 11$ $\Rightarrow$ 質因數有 3, 7, 11 三個，$3+7+11=21$。

$$\begin{array}{r|l} 9 & 43659 \\ \hline 9 & 4851 \\ \hline 7 & 539 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

3、(E) 下列何者是 2^{2007} 除以 10 的餘數？ (A)0 (B)2 (C)4 (D)6 (E)8

解析： 觀察個位數： $2^1\div 10$ 餘 2

$2^2\div 10$ 餘 4

$2^3\div 10$ 餘 8

$2^4\div 10$ 餘 6

$2^5\div 10$ 餘 2

$2^6\div 10$ 餘 4

每四次為一循環，又 $2^{2007}=(2^4)^{501}\cdot 2^3$ $\therefore$ 餘數為 8

4、(ACD) (複選)若六位數 $92a92b$ 可被 36 整除，則 a 之值可能為

(A)1 (B) 4 (C) 6 (D)7 (E) 9

解析：

被 36 整除既(末 2 位為 4 的倍數)且(數字加起來是 9 的倍數)，

故 $b=0,4,8$ 且 $9+2+a+9+2+b=27$ 或 36，即 $a+b=5$ 或 $14\Rightarrow a=1,6,7$

5、(B) 在 200 與 220 之間共有多少個質數？ (A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個 (E)5 個

解析：201,⋯, 219 中去掉 2 與 5 的倍數，再扣掉 3、7 的倍數，剩下 203、209、211，比 $\sqrt{211}$ 小的質數有 2, 3, 5, 7, 11, 13 均不為 209、211 的因數；209 與 211 均為質數。

6、(E) 試求 $lcm[\,4^2\times 6\times 9^2\times 11^2,\ 6^2\times 11\times 15\times 33\,]=$

(A)1 (B) 6×11 (C) $2^2\times 3^3\times 11$ (D) $2^2\times 3^4\times 11^2$ (E) $2^5\times 3^5\times 5\times 11^2$

解析： $4^2\times 6\times 9^2\times 11^2=2^5\times 3^5\times 11^2$

$6^2\times 11\times 15\times 33=2^2\times 3^4\times 5\times 11^2$

7、(ABCD) (複選)下列各數何者為 9 的倍數？

(A)23574897 (B)6^{12} (C)612×372 (D)270^3-171^3 (E)$10^{100}+1$

解析：(A)（◯）： $2+3+5+7+4+8+9+7=45$ 為 9 的倍數。

(B)（○）：$6^{12}=6^2\times6^{10}=(2\times3)^2\times6^{10}=9\times2^2\times6^{10}$。

(C)（○）：$612\times372=9\times68\times372$。

(D)（○）：$270^3-171^3=(270-171)(270^2+270\times171+171^2)$

$$=99\times(270^2+270\times171+171^2)$$

$$=9\times11\times(270^2+270\times171+171^2)$$ 。

(E)（╳）：$10^{100}+1$的數字和爲 2，不爲 9 的倍數。

故答案爲(A) (B)(C)(D)。

二、填充題 (每題 10 分)

1、設正整數 m, n，且 $m\,|\,21n+5,\ m\,|\,7n+3$ 則 m 之值爲＿＿＿＿＿。

$\boxed{答案}$：1,2,4

$\boxed{解析}$：$m\big|21n+5,\ m\big|7n+3\Rightarrow m\big|(21n+5)-3(7n+3)\Rightarrow m\big|4$，$\therefore m=1,2,\ 4$

2、設 9936 的正因數個數有＿＿＿＿＿個，又其因數總和爲＿＿＿＿＿。

$\boxed{答案}$：40, 0

$\boxed{解析}$：$9936=2^4\times3^3\times23$

正因數個數$(4+1)\times(3+1)\times(1+1)=40$個；因數成對一正一負兩兩和爲 0$\Rightarrow$ 總和爲 0

3、設 $x=3600$，則 x 的正因數中是 4 的倍數而非 25 的倍數者共有＿＿＿＿＿個。

$\boxed{答案}$：18

$\boxed{解析}$：$x=3600=2^4\times3^2\times5^2=2^4\times3^2\times5^2=2^2(2^2\times3^2\times5^1)5$的正因數中合乎條件的共

$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=18$ 個。

4、設 $n\in\mathbb{N}$ 且 $\dfrac{3n+16}{2n-3}\in\mathbb{N}$，求 $n=$＿＿＿＿＿。

$\boxed{答案}$：2 或 22

$\boxed{解析}$：$\because\begin{cases}2n-3\big|2n-3\\2n-3\big|3n+16\end{cases}\Rightarrow 2n-3\big|2(3n+16)-3(2n-3)=41$

$\therefore 2n-3=1$或 41　　$\therefore n=2$或 22（代入皆合）。

5、設 a 爲一整數。若 $a\big|(a+4)$, $(a-1)\big|(a+9)$, $(a-4)\big|(3a+6)$，試求 a 之值＿＿＿＿＿＿。

$\boxed{答案}$：$a=2$

$\boxed{解析}$：由$a\big|(a+4)$，知$a\big|(a+4)-a$，即$a\big|4$，a 值有：$a=1,-1,2,-2,4,-4$……①

將①代入$(a-1)\big|(a+9)$中檢驗，$a=-1,2$……②

將②代入$(a-4)\big|(3a+6)$中檢驗，$a=2$……③

由①②③，知$a=2$

6、試求不大於 143 而與 143 互質的正整數之個數爲＿＿＿＿＿＿＿＿個。

$\boxed{答案}$：120

解析： 1 到 143 的整數共有 143 個。因爲$143=11\times13$，

11 的倍數共有$11\times1,\ 11\times2,\ \cdots,\ 11\times13$等 13 個。

13 的倍數共有$13\times1,\ 13\times2,\ \cdots,\ 13\times11$等 11 個。

而$11\times13=13\times11=143$重複。

故「不大於 143 而與 143 互質的正整數之個數」$=143-(13+11-1)=120$

7、$1ab77$ 爲 99 之倍數，則序對 (a, b) =____________。

答案：(2,1)

解析： $99=9\times11$

$9|1ab77 \Rightarrow 9|1+a+b+7+7=a+b+15 \Rightarrow a+b=3,12$

$11|1ab77 \Rightarrow 11|1-a+b-7+7=-a+b+1 \Rightarrow -a+b=-1$

其中$\begin{cases}a+b=12\\-a+b=-1\end{cases}$(不合)$\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\-a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

8、設 $a, b, c\in\mathbb{N}$且 $a:b:c=$ 8 : 12 : 9，又 gcd(a,b,c) + lcm$[a,b,c]$ = 438，則 gcd(a,b,c) = ___________，又 $a=$___________。

答案：6, 48

解析： $a=8k,\ b=12k,\ c=9k$

$$\begin{array}{r|rrr} k & 8k & 12k & 9k \\ \hline 4 & 8 & 12 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$\therefore$gcd$(a,b,c)=k$；lcm$(a,b,c)=72k \Rightarrow k+72k=438$，$k=6$，故 $a=8\times6=48$

9、設$a\in\mathbb{N}$，若以 a 分別除 1112, 2139, 3956 所得的餘數都爲相同正整數，則 a =_______，又其餘數 r =_______。

答案：79,6

解析：$\because$餘數均相同$\therefore a|2139-1112$ 且 $a|3956-2139 \therefore a|1027$ 、$a|1817$

$\because a|(1027,1817)\Rightarrow a|79$，即$a=1$或 79，$\because a=1$不合，$\therefore a=79$

$1112\div79=14\cdots\cdots6 \quad \therefore r=6$

10、設 n 爲自然數，且 $n\le300$，若$(n, 36)=6$ 則合於條件之 n 值共_______個。

答案：17

解析：

$n\in\mathbb{N},\ n\le300,\ (n,\ 36)=6$，$n=6k\Rightarrow(k,\ 6)=1$ 且 $n\le300$

$1\le k\le50,\qquad 50-25-16+8=17$

11、設$a,b\in\mathbb{N}$ 且已知$\dfrac{a-68}{b-85}=\dfrac{a}{b},(a,b)=6$，試求 $a=$________，$b=$_________。

答案：24 ; 30

解析：$\dfrac{a-68}{b-85}=\dfrac{a}{b} \Rightarrow \cancel{ab}-68b=\cancel{ab}-85a \Rightarrow a:b=(-68):(-85)=4:5$

令$\begin{cases} a=4k \\ b=5k \end{cases}, k\in\mathbb{N}$，又$(a,b)=k=6$，$\therefore a=24, b=30$。

12、設 a, b 為兩正整數，且 $40<a<b$，又 $\gcd(a, b) = 31$，$\text{lcm}[a, b] = 1488$，則 a = ________, b = ________。

答案：93, 496

解析：$40 < a < b$

$a=31\times h,\ b=31\times k$ 且 $\gcd(h,k)=1$

$\because \text{lcm}(a,b)=1488=31\times h\times k\ \ \therefore hk=48$

$\therefore h=1, k=48$ (不合) $h=3,\ k=16\ \ \therefore a=93,\ b=496$

13、(1) 利用輾轉相除法求 $\gcd(1616, 2121)=$ ________。

(2) 找一組整數 x, y 使 $(1616, 2121) = 1616x + 2121y$ 則序對 (x, y) = ______。

答案：(1)101　(12) $(4,-3)$

解析：

a	1616	2121	b
$-3a+3b$	1515	1616	a
$4a-3b$	101	505 505	$-a+b$
		0	

$\therefore$ $(1616, 2121)=101$；$101=1616\times 4+2121\times(-3)$，$\therefore$ $(x, y)=(4, -3)$

14、蘇武數羊，羊不滿一萬隻，每 6 隻一數，7 隻一數，9 隻一數，都餘 2 隻，則羊隻最多有__________隻。

答案：9956

解析：設羊隻 x 隻, $6|x-2,\ 7|x-2,\ 9|x-2$，$\therefore x-2$ 為 $\text{lcm}[6,7,9]$的倍數，

$\therefore x-2=126k$，取 $k=79$ 得 $x=9956$

15、設 $a,b,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{N}$ 且滿足$\begin{cases} a=bq_1+4098 \\ b=4098q_2+582 \\ 4098=582q_3+24 \end{cases}$，求 a,b 的最大公因數為______。

答案：6

解析：$(a,b)=(b,4098)=(4098,582)=(582,24)=6$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 582 & 24 \\ \hline 3 & 291 & 12 \\ \hline & 97 & 4 \end{array}$$